# Metodi Matematici per l'Ingegneria per l'Ambiente ed il Territorio

Carlo Bardaro

# Capitolo 1

# Serie di potenze e serie di Fourier

## 1.1 Serie di potenze in $\mathbb{C}$

Una *serie di potenze* nel campo complesso è una serie del tipo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \tag{1.1}$$

dove $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di numeri complessi, $z_0, z \in \mathbb{C}$ sono numeri complessi con $z_0 \in \mathbb{C}$ fissato. Il punto $z_0$ si chiama il *polo* o *centro* della serie di potenze e $\{a_n\}$ è la successione dei *coefficienti*.

Se $a_n,\ z, z_0$ sono tutti numeri reali, la serie di potenze corrispondente si chiamerà *a termini reali*. Esempi di serie di potenze a termini reali sono le serie di Taylor delle funzioni di una variabile. Così le serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(z-1)^n$$

sono esempi di serie di potenze. Le prime due sono a termini reali (sono rispettivamente le serie di McLaurin delle funzioni $f(x) = e^x$, e $g(x) =$

$\log(x+1)$), con coefficienti rispettivamente dati da $a_n = 1/n!$ $n = 0, 1, \dots,$ e $a_n = (-1)^{n-1}/n$, $n = 1, 2, \dots,$ $a_0 = 0$, mentre la terza è una serie in campo complesso con centro nel punto $z = 1$, e coefficienti $a_n = n$, per ogni $n = 1, 2, \dots$ e $a_0 = 0$.

Come è noto la scrittura

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

rappresenta il valore del limite delle somme parziali:

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k (z - z_0)^k.$$

Si tratterà allora di vedere per quali valori di $z$ il limite esiste finito.

Come si vede immediatamente, le serie di potenze convergono sempre in almeno un punto: il centro $z_0$. Infatti calcolando la (1.1) nel centro, tutti i termini della serie $a_n(z - z_0)^n$ sono nulli, ad eccezione del primo che è $a_0$.

Nel seguito limiteremo lo studio alle serie di potenze con centro $z_0 = 0$. Ciò non è restrittivo in quanto a questo caso ci si può sempre ricondurre dalla (1.1) facendo la traslazione $w = z - z_0$. Studieremo pertanto le serie del tipo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \tag{1.2}$$

Si prova il seguente teorema:

**Teorema 1** *La serie di potenze (1.2) converge per ogni punto z appartenente ad un disco di raggio* $r \geq 0$ *e centro nell'origine.*

Il disco, la cui esistenza è fornita dal Teorema 1 si chiama *disco di convergenza* della serie e il raggio corrispondente *raggio di convergenza.*

Si osservi che il disco di convergenza può ridursi anche ad un solo punto (il centro), oppure può essere tutto lo spazio. In questi casi estremi, il raggio è $r = 0$ nel primo caso, oppure $r = +\infty$ nel secondo.

Come si calcola il raggio $r$? Intanto sussiste la seguente definizione di raggio di convergenza:

$$r = \sup\{|z| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ è assolutamente convergente}\}.$$

Vale il seguente teorema:

**Teorema 2** *(formula di Cauchy-Hadamard): Supponiamo che esista il limite*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda.$$

*Allora se* $\lambda = 0$, *si ha* $r = +\infty$; *se* $\lambda = +\infty$, *allora* $r = 0$; *infine se* $\lambda$ *è un numero finito e diverso da zero, si pone* $r = 1/\lambda$.

Talvolta è difficile calcolare il limite della formula di Cauchy-Hadamard. In tali casi è possibile mostrare che se esiste il limite dei rapporti:

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|, \tag{1.3}$$

allora tale limite coincide con $\lambda$. È comunque evidente che per poter applicare la suddetta formula per $\lambda$ occorre che almeno definitivamente, sia $a_n \neq 0$. Ciò non è affatto detto. Nei casi in cui non è possibile applicare la formula con il limite dei rapporti data dalla (1.3), nè risulta semplice il calcolo con la formula di Cauchy-Hadamard, si può osservare che dalla definizione di raggio di convergenza sopra ricordata, il raggio può essere calcolato direttamente applicando i classici teoremi del rapporto o della radice alla serie (1.2).

**Esempi**.

1. Calcoliamo il raggio di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} nz^n$. Risulta in tal caso $a_n = n$ per ogni $n = 1, 2, \ldots$. Usando Cauchy-Hadamard si ottiene:

   $$\lambda = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$

   da cui segue che $r = 1$. Osserviamo qui che operando con il limite (1.3) si ha ancora $r = 1$.

2. Calcoliamo il raggio di convergenza della serie

   $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{3n}.$$

   Qui osserviamo che le potenze della variabile $z$ che compaiono nella serie sono soltanto quelle pari. Questo vuol dire che i coefficienti di indice dispari sono tutti nulli. Allora non possiamo calcolare il raggio con il limite (1.3). Non è possibile calcolare nemmeno il limite del criterio di

Cauchy-Hadamard, perchè il limite nella formula non esiste. Operiamo allora calcolando direttamente il raggio della serie con il criterio del rapporto. Indicato con $b_n$ il termine generale della serie di potenze data, si ha:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{z^{2(n+1)}}{3(n+1)}\frac{3n}{z^{2n}}\right| = |z|^2.$$

Allora se $|z| < 1$ la serie converge assolutamente, mentre se $|z| > 1$ la serie non converge. Pertanto il raggio di convergenza è 1.

Se una serie di potenze del tipo (1.2) ha raggio di convergenza $r > 0$ allora per definizione, essa converge assolutamente per ogni punto $z$ appartenente al disco di convergenza. La somma della serie, per tali $z$, rappresenta quindi una funzione della variabile $z$, $f(z)$, definita sul disco di convergenza. Si pone cioè:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Nel caso di serie di potenze reali, per ogni $x \in ]-r, r[$, dove $r$ è il raggio di convergenza, la serie converge assolutamente e la somma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

è una funzione che ammette sull'intervallo di convergenza $]-r, r[$ le derivate di tutti gli ordini. La serie di partenza diventa proprio la serie di McLaurin di $f$. Cioè si dimostra che per la $f$ vale la formula:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!},$$

per ogni $n = 0, 1, 2, \ldots$, dove si pone $f^{(0)}(0) = f(0)$.

Ciò si basa sul seguente teorema:

**Teorema 3** *Se risulta:*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

*per ogni* $x \in ]-r, r[$, *allora* $f \in C^\infty(]-r, r[)$ *e risulta:*

$$
\begin{aligned}
&f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \\
&f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots \\
&f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) a_n x^{n-k},
\end{aligned}
$$

*per ogni* $x \in ]-r, r[$, $k \in I\!N$.

Un'altra proprietà importante delle serie di potenze a termini reali è la possibilità di essere integrate termine a termine, cioè sussiste il seguente:

**Teorema 4** *Sotto le ipotesi del teorema precedente, se* $[a, b] \subset ]-r, r[$ *risulta*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1}).$$

Il teorema precedente consente di ricavare nuove serie di McLaurin a partire da serie note. Facciamo un esempio. Ricaviamo la serie di McLaurin della funzione $f(x) = \arctan x$, e il relativo raggio di convergenza. Si ha per ogni $x$ :

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt.$$

Poichè la funzione $g(x) = 1/(1+x^2)$ è la somma della serie geometrica di ragione $-x^2$, quando $|x| < 1$, risulta:

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad x \in ]-1, 1[.$$

La serie nella precedente relazione è una serie di potenze con raggio di convergenza uguale ad 1. Allora se $x \in ]-1, 1[$, supponendo per semplicità che $x > 0$, l'intervallo $[0, x]$ è contenuto in $]-1, 1[$ e quindi applicando il teorema precedente all'intervallo $[0, x]$, si ha

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1},$$

per ogni $x \in ]-1,1[$. Per inciso, osserviamo che la serie converge anche in $x = 1$ e la sua somma è data da $\arctan 1 = \pi/4$. Otteniamo cosí un'approssimazione razionale del numero $\pi$ data da:

$$\pi = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

## 1.2 Serie trigonometriche e di Fourier

Una serie trigonometrica è una serie del tipo:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \tag{1.4}$$

dove $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ sono le successioni (di numeri reali) dei *coefficienti* della serie. Le somme parziali n-esime della (1.4)

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

sono *polinomi trigonometrici* di grado n (se $a_n$ oppure $b_n$ è diverso da zero).

C'è un legame interessante tra le serie di potenze e le serie trigonometriche del tipo (1.4). Infatti, posto $z = e^{ix}$, la (1.4) è esattamente la parte reale della serie:

$$\frac{1}{2}\ a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k - ib_k]\ z^k. \tag{1.5}$$

Basta osservare che:

$$\begin{aligned} & [a_k - ib_k]\ z^k = [a_k - ib_k]\ e^{ikx} \\ = \ & a_k\ \cos kx + b_k\ \sin kx + i\{a_k\ \sin kx - b_k\ \cos kx\}. \end{aligned}$$

La serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \{a_k\ \sin kx - b_k\ \cos kx\}$$

che è la parte immaginaria della (1.5), si chiama *serie coniugata* della (1.4).

Facciamo alcuni esempi.

1. Se $0 \leq r < 1$, le serie trigonometriche

$$(a) \quad \sum_{k=1}^{\infty} r^k \ \cos kx, \qquad\qquad (b) \quad \sum_{k=1}^{\infty} r^k \ \sin kx$$

sono assolutamente convergenti in $I\!R$, come si dimostra facilmente. Calcoliamone la somma. Posto $z = r\ e^{ix}$, consideriamo la serie di potenze $\sum_{k=1}^{\infty} z^k$. Dato che $|z| = r < 1$, questa serie è convergente ed ha per somma:

$$\begin{aligned} \frac{z}{1-z} &= \frac{r\ e^{ix}}{1 - r\ e^{ix}} = \frac{r\ e^{ix}\ (1 - r\ e^{-ix})}{(1 - r\ e^{ix})\ (1 - r\ e^{-ix})} \\ &= \frac{r\ e^{ix} - r^2}{1 - 2r\ \cos x + r^2} \end{aligned}$$

Allora:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} r^k \ \cos kx &= Re \left[ \frac{r\ e^{ix} - r^2}{1 - 2r\ \cos x + r^2} \right] \\ &= \frac{r\ \cos x - r^2}{1 - 2r\ \cos x + r^2} \end{aligned}$$

Per la (b) procedere in modo analogo.

2. La serie trigonometrica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}$$

è assolutamente convergente in $I\!R$ e per calcolare la somma procediamo come prima, considerando un'opportuna serie di potenze. Posto $z = e^{ix}$, si ha:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!} &= Re \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right] \\ &= Re\ e^{\cos x + i \sin x} = e^{\cos x} \ \cos(\sin x). \end{aligned}$$

3. La serie trigonometrica

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^k \ \sin 2kx}{(2k)!}$$

è assolutamente convergente in $I\!R$. Per il calcolo della somma, si pone $z = \sqrt{r}\ e^{ix}$, e si utilizza lo sviluppo di $\cosh z$, che in $\mathbb{C}$ ha la stessa espressione che in $I\!R$.

Sia ora $f : [-\pi, \pi] \to I\!R$ una funzione limitata ed integrabile in $[-\pi, \pi]$. Esistono allora anche gli integrali:

$$\widehat{f}_c(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \ \ k = 0, 1, 2, \dots \tag{1.6}$$

$$\widehat{f}_s(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx, \ \ k = 1, 2, \dots. \tag{1.7}$$

La serie trigonometrica

$$\frac{\widehat{f}_c(0)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_c(k) \cos kx + \widehat{f}_s(k) \sin kx, \tag{1.8}$$

si chiama la *serie di Fourier generata da* $f$ e i coefficienti $\widehat{f}_c(k)$, $\widehat{f}_s(k)$ si chiamano i *coefficienti di Fourier* di $f$.

A priori nulla si può dire in generale sul comportamento della serie di Fourier di una funzione $f$. Dato che le somme parziali di ogni serie trigonometrica sono funzioni periodiche di periodo $2\pi$ è allora chiaro che se esse convergono in ogni punto, la somma dovrà essere una funzione periodica di periodo $2\pi$. La periodicità costituisce quindi una restrizione necessaria per una funzione $f$ affinchè la sua serie di Fourier converga alla funzione stessa in tutto $I\!R$.

Tuttavia la serie di Fourier può convergere in un dato punto $x_0$ anche ad un valore diverso da $f(x_0)$. Prima di formulare un teorema di convergenza generale per le serie di Fourier di funzioni integrabili, premettiamo la seguente definizione. Una funzione $f : [-\pi, \pi] \to I\!R$ si dice *regolare a tratti* se esiste un numero finito di punti $x_i \in [-\pi, \pi]$, $i = 1, 2, \dots n$, tali che la restrizione della $f$ su ogni sottointervallo $]x_i, x_{i+1}[$ è di classe $C^1(]x_i, x_{i+1}[)$ e la derivata $f'$ si mantiene limitata in ciascuno degli intervalli detti.

Per esempio, ogni funzione a gradinata è una funzione regolare a tratti. Una tale funzione ha quindi al piú un numero finito di punti di discontinuità di prima specie (perchè?) ed è sempre derivabile ad eccezione di un numero finito di punti ed esiste un $M > 0$, tale che $|f'(x)| \leq M$, per ogni $x \in [-\pi, \pi]$, ad eccezione dei punti (in numero finito) ove non esiste.

Sussiste il seguente teorema

**Teorema 5** *Se* $f : [-\pi, \pi] \to I\!R$ *è regolare a tratti allora la serie di Fourier di* $f$ *converge in ogni punto di* $[-\pi, \pi]$*. Precisamente, se* $f$ *è continua in un punto* $x_0$ *interno, allora la serie converge ad* $f(x_0)$*; se la* $f$ *è discontinua in un punto interno* $x_0$ *la serie converge al valore* $[f(x_0+) + f(x_0-)]/2$*, media aritmetica tra il limite destro e sinistro della* $f$ *in* $x_0$*. Infine in ciascuno degli estremi la serie converge al valore* $[f(-\pi+) + f(\pi-)]/2$*.*

Se la funzione $f$ è inizialmente definita sull'intervallo chiuso $[-\pi, \pi]$ allora essa può esser prolungata con periodicità $2\pi$ a tutto l'asse reale, a patto di modificare eventualmente il valore assunto da $f$ nel punto $\pi$, in modo da ottenere $f(\pi) = f(-\pi)$. La funzione cosí ottenuta verrà nel seguito indicata con $f^\sharp$. Se la funzione $f$ è continua in $[-\pi, \pi]$ e se $f(\pi) = f(-\pi)$ allora la funzione $f^\sharp$ è continua e $2\pi-$periodica su tutto $I\!R$. Se poi la $f$ è anche regolare a tratti, allora la serie di Fourier di $f$ converge in ogni punto di $I\!R$ alla funzione $f^\sharp$.

Se $f : [-\pi, \pi] \to I\!R$ è una funzione pari, cioè $f(x) = f(-x)$, allora i coefficienti di Fourier $\widehat{f}_s(k)$, con $k = 1, 2, \ldots$, sono tutti nulli. Infatti la funzione $f(x) \sin kx$ è dispari, (cioè $f(-x)\sin(-kx) = -f(x)\sin kx$) e pertanto il suo integrale su $[-\pi, \pi]$ è nullo. La serie di Fourier di una funzione pari si riduce pertanto ad una *serie di soli coseni*, del tipo:

$$\frac{\widehat{f}_c(0)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_c(k) \cos kx,$$

dove i coefficienti $\widehat{f}_c(k)$ possono essere scritti nella forma:

$$\widehat{f}_c(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos kx dx, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Analogamente se la funzione $f$ è dispari, allora saranno nulli i coefficienti $\widehat{f}_c(k)$ mentre per i coefficienti $\widehat{f}_s(k)$ valgono le formule:

$$\widehat{f}_s(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin kx dx, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Infatti in tal caso la funzione $f(x) \sin kx$ è pari. La serie di Fourier diventa quindi una *serie di soli seni*, del tipo

$$\sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_s(k) \sin kx.$$

Supponiamo ora che la funzione sia inizialmente definita in un intervallo del tipo $[-T/2, T/2]$, con $T > 0$ assegnato. È possibile estendere le definizioni dei coefficienti di Fourier e della serie di Fourier in modo semplice, eseguendo un cambiamento di variabile che riconduca a funzioni definite in $[-\pi, \pi]$. In tal caso si parlerà di periodicità di periodo $T$. Senza entrare nei dettagli si dimostrano facilmente le seguenti formule:

$$\widehat{f}_c(k) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \ \cos(\frac{2k\pi}{T} \ x) \ dx, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{1.9}$$

$$\widehat{f}_s(k) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \ \sin(\frac{2k\pi}{T} \ x) \ dx, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{1.10}$$

e la serie di Fourier diventa

$$\frac{\widehat{f}_c(0)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_c(k) \ \cos(\frac{2k\pi}{T} \ x) + \widehat{f}_s(k) \ \sin(\frac{2k\pi}{T} \ x)\}.$$

**Esempi**

1. Scriviamo la serie di Fourier della funzione $f : [-1, 1] \rightarrow I\!\!R$ definita dalla

   $$f(x) = \begin{cases} 1 & -1 \leq x \leq 0 \\ 2 & 0 < x < 1 \end{cases}$$

   La funzione è estendibile a tutto $I\!\!R$ con periodicità $T = 2$. È allora sufficiente calcolare $a_k$, $b_k$ con le (10). Si ha facilmente $\widehat{f}_c(k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, $\widehat{f}_c(0) = 3$ e $\widehat{f}_s(k) = [1 - (-1)^k]/k\pi$, $k = 1, 2, \ldots$. Pertanto si ottiene:

   $$f \sim \frac{3}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)\pi x)}{2k-1}$$

   In base al Teorema la serie di Fourier converge per ogni $x \in I\!\!R$ e la sua somma è data da $f(x)$ per ogni $x \notin Z\!\!\!Z$, mentre in ogni intero la somma è $3/2$.

2. Sviluppiamo in serie di coseni la funzione $f(x) = x$, $x \in [0, 1]$. Prolunghiamo in modo pari la $f$ a tutto $[-1, 1]$, cioè poniamo $\widetilde{f} = |x|$, $x \in$

$[-1,1]$; la $\widetilde{f}$ è poi prolungabile a tutto $I\!R$ con periodo $T = 2$. Risulta allora $\widetilde{f}_s(k) = 0$, per ogni $k = 1, 2, \ldots$. Inoltre

$$\widehat{f}_c(k) = \int_{-1}^{1} |x| \cos(k\pi x) dx = \frac{2}{k^2\pi^2}[(-1)^k - 1], \ k = 1, 2, \ldots,$$

mentre per $k = 0$ otteniamo $\widehat{f}_c(0) = 1$. Pertanto la serie di Fourier è data dalla:

$$\frac{1}{2} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2\pi^2}[(-1)^k - 1] \cos(k\pi x),$$

che si può scrivere anche nella forma

$$\frac{1}{2} - 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2\pi^2} \cos((2k-1)\pi x).$$

Concludiamo questo paragrafo, con il seguente teorema che fornisce una sorprendente proprietà delle serie di Fourier.

**Teorema 6** *Sia $f$ una funzione continua e periodica (ad esempio di periodo $2\pi$). Allora la serie di Fourier di $f$ può essere integrata termine a termine, cioè per ogni $x \in I\!R$ si ha:*

$$\begin{aligned} \int_0^x f(t)dt &= \frac{\widehat{f}_c(0)}{2}x + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x \{\widehat{f}_c(k) \cos kt + \widehat{f}_s(k) \sin kt\} dt \\ &= \frac{\widehat{f}_c(0)}{2}x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\widehat{f}_c(k) \sin kx + \widehat{f}_s(k)(1 - \cos kx)}{k}. \end{aligned}$$

Si osservi che la suddetta proprietà sussiste indipendentemente dalla convergenza o meno della serie ad $f$.

# Capitolo 2

# La trasformata di Fourier

## 2.1 Definizione e prime proprietà

Nel Capitolo I abbiamo visto come una funzione periodica possa essere, in taluni casi, sviluppata in serie di Fourier, nel senso della convergenza puntuale. Siccome le somme parziali di una serie trigonometrica rappresentano funzioni periodiche, è chiaro che per avere la convergenza puntuale, in tutto l'asse reale, della serie di Fourier di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ alla funzione $f$ stessa, occorre partire da una funzione periodica e dello stesso periodo. Cosí se la funzione $f$ non è periodica, possiamo avere la sviluppabilità soltanto in intervalli di lunghezza pari al periodo. Se ad esempio la funzione $f$ è di classe $C^1(\mathbb{R})$, cioè ammette derivata continua in ogni punto di $\mathbb{R}$, la sua serie di Fourier converge puntualmente in $\mathbb{R}$ non alla $f$ ma alla funzione $f^\sharp$, estensione periodica di $f$ fuori di un intervallo di ampiezza pari al periodo delle somme parziali della serie (ad eccezione degli estremi di tale intervallo).

Tuttavia è molto utile avere a disposizione una rappresentazione di una funzione $f$ non periodica, analoga alla somma di una serie trigonometrica. Ciò è possibile se sostituiamo alla serie un integrale, ottenendo cosí una rappresentazione non discreta di $f$. In tale rappresentazione il ruolo dei coefficienti di Fourier di $f$ è ora giocato dall'integrale:

$$\widehat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx, \tag{2.1}$$

dove $\lambda \in \mathbb{R}$.

La funzione $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definita dalla (2.1) si chiama *trasformata di Fourier di $f$*. Occorre dare un senso all'integrale espresso dalla (2.1), cioè occorre introdurre delle ipotesi per le quali (2.1) esista come integrale generalizzato in $\mathbb{R}$. Per far ciò sarà sufficiente assumere che $f$ sia assolutamente integrabile in $\mathbb{R}$, cioè che esista finito l'integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx.$$

Indichiamo con $L^1(\mathbb{R})$ lo spazio di tutte le funzioni $f$ assolutamente integrabili in $\mathbb{R}$. Nel prossimo paragrafo ci occuperemo delle proprietà della funzione $\widehat{f}$. Per il momento anticipiamo il fatto che pur essendo $\widehat{f}$ sufficientemente regolare, essa non risulta in generale assolutamente integrabile in $\mathbb{R}$, come funzione di $\lambda$. Vale tuttavia il seguente:

**Teorema 1** *Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ è continua e $\widehat{f}$ è assolutamente integrabile in $\mathbb{R}$, allora si ha:*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda, \tag{2.2}$$

*per ogni $x \in \mathbb{R}$.*

. La formula espressa dal teorema precedente ricostruisce la funzione $f$ a partire dalla funzione $\widehat{f}$, allo stesso modo che la serie di Fourier di $f$ ricostruisce una funzione periodica a partire dai suoi coefficienti di Fourier. La ricostruzione di una funzione dalla sua trasformata di Fourier è di fondamentale importanza nelle applicazioni, in particolare nella risoluzione di equazioni alle derivate parziali (come vedremo nel Cap. 4).

Sussiste il seguente teorema, del quale non daremo la dimostrazione.

**Teorema 2** *Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$. Allora la funzione $\widehat{f}$ è continua in $\mathbb{R}$ ed inoltre:*

$$\lim_{|\lambda|\to+\infty} |\widehat{f}|(\lambda) = 0.$$

Posto

$$C_0(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R}\to\mathbb{C} : f \text{ è continua e } \lim_{|x|\to+\infty} |f|(x) = 0\},$$

il teorema precedente afferma che $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R})$, per ogni funzione assolutamente integrabile $f$.

Il seguente teorema esprime la proprietà di linearità dell'operatore trasformata di Fourier:

**Teorema 3** *Se $f, g \in L^1(I\!\!R)$, e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, risulta:*

$$\widehat{\alpha f + \beta g} = \alpha \widehat{f} + \beta \widehat{g}.$$

ESEMPI (a) Sia $f(t) = e^{-\gamma|t|}$, $\gamma > 0$. Si ha:

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma|t|} e^{-i\lambda t} dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\gamma t} cos(\lambda t) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2\gamma}{\lambda^2 + \gamma^2}.\end{aligned}$$

(b) Sia

$$f(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq a \\ 0 & |t| > a \end{cases}$$

con $a > 0$. Si ha:

$$\widehat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-i\lambda t} dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{sin(\lambda a)}{\lambda}.$$

Osserviamo che in tal caso $\widehat{f} \notin L^1(I\!\!R)$, perchè la funzione $\sin(\lambda a)/\lambda$ non è assolutamente integrabile in $I\!\!R$.

(c) Sia $f(t) = \dfrac{1}{t^2 + a^2}$, $a > 0$.
In tal caso utilizzando la teoria delle funzioni di variabile complessa, si ha:

$$\widehat{f}(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a} e^{-a|\lambda|}, \quad \lambda \in I\!\!R.$$

(d) Sia $f(t) = e^{-at^2}$, $a > 0$.
In tal caso, si dimostra che $\widehat{f}$ é l'unica soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + (t/2a)y = 0 \\ y(0) = 1/\sqrt{2a}, \end{cases}$$

Da questo, risolvendo l'equazione, segue che

$$\widehat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\lambda^2/4a}.$$

## 2.2 Proprietà fondamentali della trasformata di Fourier

In questo paragrafo trattiamo delle principali proprietá della trasformata di Fourier in $\mathbb{R}$.

**Teorema 4** *Sia* $\{f_n\}_n$ *una successione di funzioni in* $L^1(\mathbb{R})$ *convergente in* $L^1(\mathbb{R})$ *ad una funzione* $f \in L^1(\mathbb{R})$, *cioè*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(t) - f(t)|dt = 0.$$

*Allora:*

$$\max_{\lambda\in\mathbb{R}} |\widehat{f_n}(\lambda) - \widehat{f}(\lambda)| \to 0, \quad n \to +\infty.$$

**Dimostrazione** É conseguenza immediata della linearità della trasformata di Fourier e della relazione:

$$\max_{\lambda\in\mathbb{R}} |\widehat{f}(\lambda)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt,$$

per ogni $f$ assolutamente integrabile in $\mathbb{R}$.

**Teorema 5** *Sia* $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$ *e* $f' \in L^1(\mathbb{R})$. *Allora:*

$$\widehat{f'}(\lambda) = i\lambda\widehat{f}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

*(Cioè la trasformata di Fourier trasforma la derivazione nel prodotto per* $i\lambda$*).*

**Dimostrazione** Dall'ipotesi, usando la formula fondamentale del Calcolo Inregrale, possiamo scrivere:

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(v)dv, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dato che $f' \in L^1(\mathbb{R})$, si ha $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$.
Integrando per parti,

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi}\widehat{f'}(\lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-i\lambda t}dt \\ &= i\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt \\ &= \sqrt{2\pi}(i\lambda)\widehat{f}(\lambda). \end{aligned}$$

**Osservazione**. In generale se $f \in L^1(I\!R) \cap C^k(I\!R)$, $k \in I\!N$, $k \geq 2$, e se $f^{(j)} \in L^1(I\!R)$, per ogni $j = 1, \ldots, k$, si ha :

$$\widehat{f^{(k)}}(\lambda) = (i\lambda)^k \widehat{f}(\lambda). \tag{2.4}$$

**Corollario 1** *Se* $f \in L^1(I\!R) \cap C^k(I\!R)$, $k \in I\!N$, *e se* $f^{(j)} \in L^1(I\!R)$, $j = 1, \ldots, k$, *si ha:*

$$\lim_{|\lambda| \to +\infty} |\lambda|^k |\widehat{f}(\lambda)| = 0. \tag{2.5}$$

**Dimostrazione** Dalla (2.4), e dal fatto che $\widehat{f^{(k)}}(\lambda) \to 0$, $|\lambda| \to +\infty$, segue l'asserto.

In particolare se $f \in C^2(I\!R) \cap L^1(I\!R)$ e $f', f'' \in L^1(I\!R)$, si ottiene $\widehat{f} \in L^1(I\!R)$.

Il Corollario 1 mette in luce che quante piú derivate ha la $f$, tanto piú rapidamente $\widehat{f}$ tende a 0, per $|\lambda| \to +\infty$.

Il teorema seguente, del quale non riportiamo la dimostrazione, mostra che la trasformata di Fourier è iniettiva.

**Teorema 6** *Sia* $f \in L^1(I\!R)$ *una funzione continua. Se* $\widehat{f}(\lambda) = 0$, *per ogni* $\lambda \in I\!R$, *si ha* $f(t) = 0$ *per ogni* $t \in I\!R$.

In particolare, se $f, g$ sono funzioni continue e se $\widehat{f}(\lambda) = \widehat{g}(\lambda)$ per ogni $\lambda \in I\!R$, si ha $f = g$.

**Teorema 7** *(Formula di Parseval). Se* $f, g \in L^1(I\!R)$, *si ha:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\lambda) g(\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(\lambda) f(\lambda) d\lambda. \tag{2.6}$$

Un' altra proprietà importante è legata al *prodotto di convoluzione* di due funzioni $f, g$ assolutamente integrabili in $I\!R$. Questo prodotto è definito dalla formula:

$$(f \star g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) g(t) dt. \tag{2.7}$$

Si può dimostrare che $f \star g$ è ben definito e risulta:

$$\|f \star g\|_1 \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Inoltre, sussiste il seguente importante:

**Teorema 8** *(Teorema di Convoluzione) Per $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, si ha:*

$$\widehat{f \star g}(\lambda) = \widehat{f}(\lambda)\widehat{g}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{2.8}$$

**Corollario 2** *Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, due funzioni continue. Se $\widehat{g} \in L^1(\mathbb{R})$, si ha:*

$$(f \star g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\lambda)\widehat{g}(\lambda)\ e^{i\lambda x} d\lambda, \tag{2.9}$$

*per ogni $x \in \mathbb{R}$.*

# Capitolo 3

# Equazioni differenziali alle derivate parziali. Equazioni del I ordine

## 3.1 Introduzione

Quando si ha a che fare con problemi che coinvolgono tassi di variazione di grandezze che dipendono da più gradi di libertà, allora spesso i modelli matematici che descrivono il problema, coinvolgono soluzioni di equazioni differenziali nelle quali l'incognita è una funzione di due o più variabili o, nei casi più complessi (dei quali però non ci occuperemo qui), da sistemi di equazioni contenenti le derivate parziali di un certo numero di funzioni di più variabili. Una equazione alle derivate parziali è quindi una relazione che coinvolge le derivate parziali di una funzione incognita, come per esempio: determinare le funzioni $z(x, y)$ che verificano l'equazione:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial x}. \tag{3.1}$$

La risoluzione di equazioni del tipo descritto sopra può essere molto difficile se non impossibile e la teoria risulta ben più difficile di quella relativa alle equazioni ordinarie.

Infatti ad esempio la soluzione generale di una equazione differenziale alle derivate parziali contiene funzioni arbitrarie, mentre l'integrale generale di una equazione differenziale ordinaria contiene costanti arbitrarie. Facciamo un esempio che illustra bene questa situazione.

Consideriamo l'equazione in $I\!R^2$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y.$$

Allora la funzione $f(x, y) = x^2 + xy$ è una soluzione, poichè la derivata parziale di $f$ rispetto ad $x$ è proprio $2x + y$, come richiesto dall'equazione. Tuttavia se aggiungiamo a $f$ una qualunque funzione della sola variabile $y$, $g(y)$, otteniamo ancora una soluzione dell'equazione stessa, perchè la derivata di $g$ rispetto ad $x$ è zero. Così l'insieme di tutte le soluzioni dell'equazione (*l'integrale generale*), contiene tutte le funzioni del tipo

$$z(x, y) = f(x, y) + g(y),$$

qualunque sia la funzione $g$.

Una volta ottenuto l'integrale generale dell'equazione in termini di arbitrarie funzioni, nei problemi che interessano le applicazioni, è importante selezionare quelle soluzioni che soddisfano a certe condizioni al bordo (concettualmente simili a quelle viste per i problemi ai limiti per le equazioni ordinarie).

Non ci occuperemo qui della teoria generale delle equazioni differenziali alle derivate parziali, argomento che può senza sforzo occupare un migliaio di pagine, senza essere completo. Ci limiteremo alle equazioni *lineari*, cioè a quelle equazioni nelle quali le derivate coinvolte appaiono al primo grado. Ad esempio l'equazione (3.1) è una equazione lineare. L'*ordine* di un'equazione lineare è determinato dalla derivata di ordine massimo coinvolta. Cosí per l'equazione (3.1) l'ordine è 2, perchè la derivata di ordine massimo che ivi compare è una derivata seconda. Un esempio di equazione non lineare è ad esempio:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + z = f(x, y),$$

nella quale la non linearità dipende dal fatto che la derivata di $z$ rispetto ad $y$ è elevata al quadrato. L'equazione è del secondo ordine.

Facciamo un esempio che mostra come le condizioni al bordo intervengono nella determinazione della soluzione finale. Si consideri ancora l'equazione (3.1):

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial x},$$

con le condizioni al bordo seguenti: poniamo $z(x,y) = 0$, per ogni $(x,y) \in A = \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$ e $z(x,y) = x$ sull'insieme $B = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$.
Scriviamo l'equazione nella forma:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y} - z\right) = 0.$$

Allora integrando direttamente rispetto ad $x$, trattando $y$ come costante, otteniamo:

$$\frac{\partial z}{\partial y} - z = f(y),$$

dove $f$ è un'arbitraria funzione della variabile $y$. Ma questa non è altro che una equazione lineare del primo ordine (ordinaria) la cui soluzione (ottenuta moltiplicando entrambi i membri dell'equazione per il fattore $e^{-y}$ ed integrando) è data dalla relazione

$$e^{-y}z = \int e^{-y}f(y)dy + g(x),$$

dove $g$ è un'arbitraria funzione della variabile $x$. Questa rappresenta la soluzione generale dell'equazione (3.1). Ora imponiamo le condizioni al bordo. Dalla $z(0,y) = 0$ ricaviamo che

$$\int e^{-y}f(y)dy = -g(0),$$

da cui $z = e^y g(x) - e^y g(0)$. Usando ora la condizione $z(x,0) = x$, otteniamo $x = g(x) - g(0)$, dalla quale si ricava $g(x) = x + g(0)$. La soluzione particolare cercata è allora data:

$$z(x,y) = xe^y.$$

Una sostituzione diretta nell'equazione darà una conferma.

## 3.2 Equazioni del primo ordine

Sia $F(x, y, u, p, q)$ una funzione continua globalmente, a valori reali delle variabili $x, y, u, p, q$ ove $(x, y) \in \Omega$, con $\Omega$ regione del piano $(x, y)$ e $u, p, q \in \mathbb{R}$. Una *equazione differenziale alle derivate parziali del prino ordine* nelle variabili indipendenti $(x, y) \in \Omega$, è un'equazione del tipo:

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \quad (x, y) \in \Omega. \tag{3.2}$$

Una *soluzione* della (3.2) è una funzione $u : \Omega \to \mathbb{R}$, con $u \in C^1(\Omega)$, tale che insieme alle sue derivate parziali del primo ordine verifica identicamente la (3.2) in $\Omega$. Come per le equazioni ordinarie, *l'integrale generale* della (3.2) è l'insieme di tutte le sue soluzioni. Se $u = u(x, y)$ è una soluzione la superficie ordinaria $z = u(x, y)$ in $\mathbb{R}^3$ è detta una *superficie soluzione* dell'equazione.

Noi ci limiteremo essenzialmente a studiare le equazioni *lineari*, cioè del tipo:

$$a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = d(x, y), \tag{3.3}$$

oppure *quasi lineari*, del tipo cioè

$$a(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u), \tag{3.4}$$

dove $a, b, c, d$ denotano funzioni assegnate che si supporranno continue nel loro insieme di definizione. Se nella (3.3) è $d(x, y) = 0$, per ogni $(x, y) \in \Omega$, allora l'equazione lineare si dice *omogenea*.

**Esempi**.

1. Si consideri l'equazione differenziale in $\Omega = \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

È ovvio che ogni funzione $z = g(x)$, che dipende soltanto dalla variabile $x$ è soluzione dell'equazione data. Se poi $z = u(x, y)$ è una soluzione dell'equazione data, allora posto $g(x) = u(x, x_0)$, dove $x_0$ è un fissato punto di $\mathbb{R}$, $g$ è ovviamente soluzione dell'equazione data. Pertanto in conclusione tutte le soluzioni sono le funzioni della sola variabile $x$. Per la nostra definizione di soluzione, le funzioni $g$ saranno prese di classe $C^1$.

2. Consideriamo l'equazione differenziale precedente, però sulla regione $\Omega = I\!R^2 \setminus \{(x,y) : x \geq 0,\ y = 0\}$. Ci chiediamno ora se l'integrale generale è ancora dato da tutte le funzioni $z = g(x)$ della variabile $x$. Consideriamo la funzione

$$u(x,y) = \begin{cases} x^2, & x > 0,\ y > 0 \\ 0, & \text{altrove in } \Omega \end{cases}$$

È facile vedere che questa funzione soddisfa ancora l'equazione data, ma non è una funzione del tipo $z = g(x)$, dipendente esplicitamente soltanto da $x$, come si deduce subito dalla definizione.

3. Consideriamo l'equazione differenziale lineare

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

È facile vedere che la funzione

$$u(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è una soluzione dell'equazione in *ogni* punto del piano, ma essa è discontinua nell'origine.

Gli esempi precedenti mettono in luce l'importanza della scelta della regione $\Omega$, perchè essa influenza l'integrale generale (inteso come insieme di tutte le possibili soluzioni, non necessariamente di classe $C^1$).

Un insieme di soluzioni della (3.2) del tipo

$$z = f(x, y, A(g(x,y))),$$

dove $f, g$ sono funzioni date e $A$ è un'arbitraria funzione, si chiama *famiglia di soluzioni.* Ad esempio l'insieme di tutte le funzioni $z = g(x)$, è una famiglia di soluzioni dell'equazione $u_y = 0$.

Un altro tipo di equazione del primo ordine che appare frequentemente nelle applicazioni è *l'equazione differenziale di una famiglia di superfici.* Essa si costruisce nel modo seguente. Sia

$$z = f(x, y, a, b) \tag{3.5}$$

una funzione continua di quattro variabili, dove $a, b$ sono parametri reali e $(x, y)$ appartiene ad una regione $\Omega$ del piano. Ogni volta che si assegnano i valori per i parametri $a, b$ si ottiene una superficie ordinaria. Supponiamo che tale superficie si proietti sul piano $(x, y)$ sull'insieme $\Omega$. Se è possibile eliminare i parametri $a, b$ tra la (3.5) e le sue derivate parziali:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y, a, b), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y, a, b),$$

si ottiene una equazione differenziale del primo ordine del tipo

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0, \quad (x, y) \in \Omega. \tag{3.6}$$

Tale equazione è per costruzione soddisfatta da ogni funzione della forma (3.5). L'equazione ottenuta si chiama *equazione differenziale della famiglia di superfici (3.5).*

**Esempio**. Troviamo l'equazione differenziale della famiglia di piani che intersecano l'asse $z$ nell'origine.

In tal caso la famiglia (3.5) è data da

$$z = ax + by,$$

con $a, b \in I\!R$. Calcolando le derivate parziali di $z$ si ha

$$\frac{\partial z}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = b.$$

Eliminando ora $a, b$ si ottiene

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} - z = 0,$$

che è l'equazione cercata.

**Esempio**. Troviamo l'equazione differenziale della famiglia di superfici

$$z = ax^2 - by^2,$$

al variare dei parametri reali $a, b$. Procedendo come sopra, eliminando $a, b$ otteniamo l'equazione differenziale:

$$z = \frac{x}{2}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{y}{2}\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Un esempio collegato al precedente è costituito dall'equazione differenziale della famiglia di superfici

$$z = A(f(x,y)), \quad (x,y) \in \Omega,$$

dove $\Omega$ è una regione del piano, $f$ è un'assegnata funzione definita in $\Omega$ ed $A$ è un'arbitraria funzione di una variabile reale. La superficie definita per ogni fissata scelta della funzione $A$, è tale che la sua proiezione sul piano $(x,y)$ è proprio $\Omega$. Se è possibile eliminare la funzione $A$ dall'equazione della superficie e dalle derivate parziali di $z$, allora si ottiene una equazione differenziale analoga alla (3.6).

**Esempio**. Sia $A$ un'arbitraria funzione definita in un intervallo $[a,b]$, e di classe $C^1$ in $[a,b]$, con $a \geq 0$. Consideriamo la famiglia di superfici ottenute dalla rotazione intorno all'asse $z$ del grafico di $z = A(x)$. Troviamo l'equazione differenziale della famiglia. A tale scopo poniamo $r(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. In tal caso $\Omega$ sarà la regione del piano compresa nella corona circolare $a < r < b$, e la funzione $f$ sarà proprio $r(x,y)$. Le superfici di rotazione saranno allora date dall'equazione $z = A(r)$. Derivando parzialmente otteniamo

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A'(r)\frac{x}{r} \text{ e } \frac{\partial z}{\partial y} = A'(r)\frac{y}{r}.$$

Eliminando $A'(r)$ otteniamo l'equazione differenziale cercata:

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

## 3.3 Equazioni lineari omogenee

In ciò che segue le funzioni $a(x,y)$, $b(x,y)$ saranno supposte di classe $C^1(\Omega)$ dove $\Omega$ è una regione del piano. Consideriamo l'equazione lineare omogenea:

$$a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (x,y) \in \Omega. \tag{3.7}$$

Supponiamo che la curva di equazioni parametriche

$$\varphi(t) = (x = f(t), y = g(t), z = z_0), \ t \in [a,b], \tag{3.8}$$

dove $f, g \in C^1[a,b]$ e $z_0 \in I\!R$ è una fissata costante, sia una curva di livello su una superfice soluzione $z = u(x,y)$ dell'equazione (3.7). La funzione composta $H(t) = u(f(t), g(t))$ è allora costante ed uguale a $z_0$. Pertanto derivando si ha

$$H'(t) = \frac{\partial u}{\partial x} f'(t) + \frac{\partial u}{\partial y} g'(t) = 0,$$

per ogni $t \in [a, b]$.

Questa espresione è simile all'equazione differenziale (3.7), il che fa pensare ad una stretta connessione tra le superfici soluzione dell'equazione e le curve soluzioni del seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie:

$$\frac{dx}{dt} = a(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = b(x, y), \quad (x, y) \in \Omega. \tag{3.9}$$

Le equazioni (3.9) si chiamano *equazioni caratteristiche* della (3.7). Ciascuna curva $\mathcal{C}_0$ definita dalle (3.9) nel piano $(x, y)$ e ogni altra curva $\mathcal{C}$ che può essere ottenuta dalla $\mathcal{C}_0$ per traslazione parallela lungo l'asse $z$ è chiamata *curva caratteristica* della (3.7). Può accadere che una curva caratteristica possa ridursi ad un punto.

Sussiste il seguente

**Teorema 1** *Supponiamo che $\Omega$ sia una regione del piano $(x, y)$, e che le funzioni $a(x, y)$, $b(x, y)$ siano di classe $C^1(\Omega)$. Allora la funzione $u(x, y)$ è soluzione dell'equazione (3.7) se e solo se $u \in C^1(\Omega)$ e la superficie $z = u(x, y)$ è una unione di curve caratteristiche della (3.7).*

Non riportiamo la dimostrazione di questo teorema. Accenniamo soltanto alla prova della condizione sufficiente. Supponiamo che $u(x, y)$ sia una funzione di classe $C^1(\Omega)$ e che la superficie $z = u(x, y)$ sia una unione di curve caratteristiche. Sia $(x_0, y_0) \in \Omega$ un punto fissato. Poniamo $z_0 = u(x_0, y_0)$ e $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$. È possibile mostrare che per il punto $P_0$ passa una ed una sola curva caratteristica della (3.7). In tale punto questa curva ha vettore tangente esattamente $(a(x_0, y_0), b(x_0, y_0), 0)$ mentre la superficie ha ivi il vettore normale $(u'_x(x_0, y_0), u'_y(x_0, y_0), -1)$. Questi vettori sono allora perpendicolari, cioè

$$a(x_0, y_0)u'_x(x_0, y_0) + b(x_0, y_0)u'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Per l'arbitrarietà di $(x_0, y_0)$ segue che $u$ è soluzione dell'equazione (3.7).

Sussiste il seguente:

**Teorema 2** *Se la funzione $u(x, y)$ è una soluzione della (3.7) e se $A$ è un'arbitraria funzione (di classe $C^1$), allora $A(u(x, y))$ è una famiglia di soluzioni della (3.7).*

**Dimostrazione**. Basta osservare che:

$$a(x,y)\frac{\partial}{\partial x}A(u(x,y)) + b(x,y)\frac{\partial}{\partial y}A(u(x,y)) =$$
$$A'(u(x,y))\left[a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right] = 0.$$

**Esempio**. Risolviamo l'equazione differenziale

$$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

sulla regione $\Omega$ determinata dalla corona circolare $a^2 < x^2 + y^2 < b^2$.

Le equazioni cratteristiche sono date da:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x.$$

La soluzione generale del sistema è allora

$$x(t) = r\cos(t-\alpha), \quad y = -r\sin(t-\alpha),$$

con $t \in I\!R$, dove $r$ e $\alpha$ sono parametri con $r \in ]a,b[$. Le curve caratteristiche sono allora cerchi del piano $(x,y)$ con centro nell'origine. Ogni funzione della forma

$$z = A(x^2+y^2), \quad (x,y) \in \Omega,$$

dove $A$ è una arbitraria funzione di classe $C^1$, appartiene a $C^1(\Omega)$ ed è costante su ogni curva caratteristica. Quindi essa è una soluzione per il Teorema 1.

Osservando che la funzione $z = x^2 + y^2$ è una soluzione dell'equazione, la stessa conclusione si ottiene con l'ausilio del Teorema 2.

Data una equazione differenziale alle derivate parziali del primo ordine, il problema di determinare una superficie soluzione che contiene una data curva, si chiama *Problema di Cauchy*. Si noti l'analogia con il classico problema di Cauchy per le equazioni ordinarie del primo ordine. Ad esempio, consideriamo il problema seguente: Trovare una superficie soluzione per l'equazione

$$2y\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

che contiene la parabola $z = x^2, y = x$. In tal caso le equazioni caratteristiche sono:

$$\frac{dx}{dt} = 2y, \; \frac{dy}{dt} = x,$$

le cui soluzioni sono del tipo:

$$x(t) = c_1 e^{-\sqrt{2}t} + c_2 e^{\sqrt{2}t}, \; y(t) = -\frac{c_1}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}t} + \frac{c_2}{\sqrt{2}} e^{\sqrt{2}t}.$$

Ora si vede facilmente che le funzioni $(x(t), y(t))$ verificano l'equazione $x^2 - 2y^2 = K$ con $K$ costante e quindi sono linee di livello della funzione $z(x, y) = x^2 - 2y^2$.

Pertanto, al variare della funzione $A \in C^1$, $z = A(x^2 - 2y^2)$ è una famiglia di superfici soluzione. Sostituendo ora $z = x^2$ e $y = x$, si ottiene $x^2 = A(x^2 - 2x^2) = A(-x^2)$, che è soddisfatta scegliendo $A(t) = -t$. Pertanto $z = 2y^2 - x^2$ è la superficie cercata.

## 3.4 Equazioni lineari e quasi lineari del I ordine

Sussiste il seguente teorema generale:

**Teorema 3** *Supponiamo che la funzione $u_p(x, y)$ sia una soluzione dell'equazione lineare:*

$$a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \tag{3.10}$$

*Se $u_p(x, y)$ è sommata a ciascuna soluzione dell'equazione omogenea associata:*

$$a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \tag{3.11}$$

*allora si ottiene ancora una soluzione della (10).*

Il teorema ha come ovvio corollario che l'integrale generale della (3.10) si ottiene determinando prima l'integrale generale della equazione omogenea associata e poi una soluzione particolare dell'equazione completa. Si noti la stretta analogia con la teoria delle equazioni differenziali lineari ordinarie.

**Dimostrazione** (del Teorema 3). Introduciamo l'operatore:

$$L = a(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial}{\partial y}, \quad (x,y) \in \Omega,$$

che associa ad ogni funzione $u \in C^1(\Omega)$ la funzione:

$$Lu = a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (x,y) \in \Omega.$$

Tale operatore è lineare nel senso che se $c_1, c_2 \in I\!R$ e $u_1, u_2 \in C^1(\Omega)$, allora risulta:

$$L(c_1u_1 + c_2u_2) = c_1L(u_1) + c_2L(u_2).$$

Supponiamo allora che $u_1$ sia una soluzione dell'equazione (3.10). Allora

$$L(u_1 - u_p) = L(u_1) - L(u_p) = c - c = 0,$$

cioè $u_1(x,y) - u_p(x,y)$ è una soluzione della (3.11). Pertanto ogni soluzione della (3.10) può essere ottenuta aggiungendo $u_p(x,y)$ ad una soluzione della (3.11). Viceversa, supponiamo che $u_2(x,y)$ sia una soluzione della (3.11). Allora

$$L(u_2 + u_p) = L(u_2) + L(u_p) = L(u_p) = c,$$

cioè $u_2(x,y) + u_p(x,y)$ è soluzione della (3.10). Pertanto una soluzione della (3.11) è ottenuta aggiungendo $u_p$ a ogni soluzione della (3.11).

Accenniamo ora a qualche metodo per ottenere le soluzioni di una equazione lineare completa. Ci riferiremo ad una classe più ampia di equazioni, quelle quasilineari, della forma

$$a(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y} = c(x,y,u), \quad (x,y) \in \Omega, \tag{3.12}$$

dove $\Omega$ è una regione del piano $(x,y)$ e $a,b,c \in C^1(\Omega \times I\!R)$. Accanto all'equazione (3.12) consideriamo il sistema delle tre equazioni ordinarie:

$$\frac{dx}{dt} = a(x,y,u), \ \frac{dy}{dt} = b(x,y,u), \ \frac{dz}{dt} = c(x,y,u), \ (x,y,z) \in \Omega \times I\!R. \tag{3.13}$$

Le (3.13) sono chiamate le *equazioni caratteristiche* della (3.12). Supponiamo che $x = f(t), \ y = g(t), \ z = h(t)$, sia una curva soluzione del sistema (3.13), dove $t \in (a,b)$. Allora la curva si chiama *curva caratteristica* della (3.12). A differenza delle curve caratteristiche introdotte per le equazioni lineari, una curva caratteristica della (3.12) non è necessariamente parallela al piano $(x,y)$. Sussiste il seguente:

**Teorema 4** *Sotto le condizioni imposte su $\Omega$ e sulle funzioni $a, b, c$, la funzione $u(x, y)$ è soluzione dell'equazione quasilineare (3.12) se e solo se $u \in C^1(\Omega)$ e la superficie $z = u(x, y)$ è una unione di curve caratteristiche della (3.12).*

La dimostrazione di questo teorema è analoga a quella per le equazioni lineari ed è quindi omessa.

**Esempio**. Sia $\Omega = I\!R^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Risolviamo l'equazione

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

Le equazioni caratteristiche hanno la forma:

$$\frac{dx}{dt} = x, \ \frac{dy}{dt} = y, \ \frac{dz}{dt} = z, \quad (x, y, z) \in \Omega \times I\!R.$$

Risolvendo il sistema si ottiene facilmente

$$x(t) = c_1 e^t, \ y(t) = c_2 e^t, \ z(t) = c_3 e^t, \quad t \in I\!R,$$

dove $c_i$, $i = 1, 2, 3$, sono parametri reali. Non può avvenire che $c_1 = c_2 = 0$, poichè $\Omega$ non contiene l'origine. Allora le curve caratteristiche sono rette con estremo nell'origine, escluso l'asse z. Il Teorema 4 allora mostra che la soluzione generale è costituita dalle funzioni $u(x, y)$ di classe $C^1(\Omega)$ che rappresentano coni con vertice nell'origine. In particolare la funzione $z(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ é una superficie soluzione in $\Omega$. Si osservi che in tal caso, se $A \in C^1(I\!R)$, la superficie $z = A(\sqrt{x^2 + y^2})$ non e' in generale, una superfice soluzione in $\Omega$. In tal caso é facile mostrare che $A$ deve verificare l'equazione $rA'(r) = A(r)$ che ha come soluzioni funzioni lineari.

**Esempio**. Consideriamo l'equazione:

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 2.$$

In tal caso, il sistema caratteristico diventa

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = 1, \quad \frac{dz}{dt} = 2,$$

da cui si ricava: $x(t) = t + c_1,\ y(t) = t + c_2,\ z(t) = 2t + c_3$ ed eliminando $t$,

$$z = x + y - k,$$

con $k$ costante. Una famiglia di soluzioni si ottiene allora scrivendo (Teorema 3):

$$x + y + A(x - y),$$

dove $A$ é una generica funzione di classe $C^1$. Infatti la funzione $z = A(x - y)$ é ovviamente una soluzione dell'equazione omogenea, qualunque sia $A \in C^1$.

**Esempio**. Consideriamo l'equazione

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

In tal caso le curve caratteristiche sono del tipo

$$\varphi(t) = (x(t) = t + c_1, y(t) = t + c_2, z(t) = c_3 e^t)$$

e una superficie soluzione é data dalla $z(x, y) = ke^{(x+y)/2}$, con $k$ costante arbitraria.

# Capitolo 4

# Equazioni differenziali alle derivate parziali del secondo ordine

## 4.1 Introduzione

Supponiamo di avere un asta (uniforme) sottile, rigidamente fissata ai suoi estremi, che possiamo identificare con i punti $x = 0$ e $x = a$, $(a > 0)$, dell'asse $x$ nel piano $(x, y)$. Ad ogni punto dell'asta associamo un' ascissa $x \in [0, a]$. Supponiamo che l'asta sia soggetta a vibrazioni longitudinali.

La deviazione del punto (generico) $x$ dell'asta dalla posizione di equilibrio all'istante $t$ sarà denotata con $u = u(x, t)$ e supporremo che la funzione $u$ sia una funzione di classe $C^2(\Omega)$, essendo $\Omega = [0, a] \times I\!R$. La funzione $u$ può assumere valori positivi o negativi a seconda che il punto $x$ sia stato deviato dalla sua posizione di equilibrio verso l'alto o verso il basso. La tensione dell'asta in un punto $x$ al tempo $t$ è determinata, in base alla legge di Hooke, dalla derivata parziale $u'_x(x, t)$. La tensione è positiva in ogni parte dell'asta che è stirata e negativa nelle parti in cui è contratta. La massa di ogni segmento di asta $(x, x + h)$ è data da $h$. Supponiamo che non ci siano forze esterne che agiscono sull'asta al di fuori di quelle che la tengono fissa agli estremi. Supponiamo infine che non ci siano scambi di energia tra l'asta e le immediate vicinanze dell'asta e che non ci siano trasformazioni di energia nell'asta, ad eccezione dell'energia cinetica e potenziale. Determiniamo una equazione differenziale che dia un modello matematico plausibile che consenta di studiare, in ogni punto, il comportamento dell'asta, cioè la funzione $u(x,t)$. Questo modello si basa su una equazione differenziale alle derivate parziali del secondo ordine. Anzitutto, osserviamo che l'accelerazione $u''_{tt}$ è per ipotesi una funzione continua; usando allora la legge di Newton (massa per accelerazione uguale forza) dato un segmento $(x, x+h)$ e $t \in I\!R$, esiste un numero $\theta \in ]0,1[$, tale che:

$$hu''_{tt}(x+\theta h, t) = u'_x(x+h,t) - u'_x(x,t).$$

Dividendo ora per $h$ ambo i membri della precedente uguaglianza e facendo il limite per $h \to 0$, si ottiene:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{4.1}$$

che è una equazione del secondo ordine. Questa equazione è di fondamentale importanza in molte questioni ed è nota come *equazione (unidimensionale) delle onde*. In seguito dedicheremo un intero paragrafo allo studio di questa equazione.

Occupiamoci ora di quest'altro problema. Supponiamo di avere un'asta (uniforme) ancora fissata agli estremi $x = 0$ e $x = a$, con $a > 0$, come nel problema precedente. Indichiamo con $u = u(x,t)$ la temperatura dell'asta nel punto $x$ e all'istante $t$. Supponiamo che $u$ sia una funzione di classe $C^2(\Omega)$ dove $\Omega = [0,a] \times [0,+\infty[$. Supponiamo che non ci sia scambio di calore con l'ambiente circostante, eccetto che ai suoi estremi. Vogliamo determinare un modello matematico che studi la funzione $u(x,t)$, in ogni punto $x$ dell'asta e per ogni $t \geq 0$. In base alle assunzioni fatte, procedendo in modo analogo all'esempio precedente, è possibile ottenere un'equazione per la funzione temperatura $u$ del tipo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{4.2}$$

che è ancora un'equazione del secondo ordine, *l'equazione (unidimensionale) del calore*.

Consideriamo un altro problema ancora. Sia $\Omega = I\!R^2 \setminus \{(0,0)\}$. Supponiamo che una particella, situata in un generico punto $P = (x,y) \in \Omega$, sia attratta verso l'origine $(0,0)$, da una forza, rappresentata dalla funzione vettoriale

$(p, q)$ dove

$$p = p(x, y) = -\frac{x}{x^2 + y^2}, \quad q = q(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Il campo ha modulo $r^{-1}$, dove $r$ è la distanza dall'origine del punto $P = (x, y)$. Sia $\gamma$ un arco che unisce il punto $P$ al punto $A = (1, 0)$, di rappresentazione parametrica:

$$x = x(t), \ y = y(t), \quad a \leq t \leq b,$$

dove le funzioni $x(t)$ e $y(t)$ sono continue e di classe $C^1$ a tratti in $[a, b]$. Indichiamo con $w_\gamma$ il lavoro compiuto dall'attrazione verso l'origine, quando la particella si muove dal punto $P$ al punto $A$, lungo la curva $\gamma$. Siccome il campo è conservativo, $w_\gamma$ non dipende dalla curva $\gamma$ ma solo dal punto $P$. Come è noto si ha la formula

$$w_\gamma = \int_\gamma p dx + q dy = \int_a^b [p(x(t), y(t))x'(t) + q(x(t), y(t))y'(t)]dt.$$

Una funzione potenziale per il campo di forze è definita dalla

$$U(x, y) = -\frac{1}{2}\log(x^2 + y^2),$$

e quindi si ha:

$$w_\gamma = U(x(b), y(b)) - U(x(a), y(a)) = U(A) - U(P).$$

Ciò implica che $w_\gamma$ è funzione di $(x, y)$; indichiamo questa funzione $u(x, y)$. Proviamo che questa funzione verifica l'equazione differenziale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{4.3}$$

A tale scopo scriviamo $w_\gamma = w_{PQ} + w_{QA}$, dove $w_{PQ}$ e $w_{QA}$ rappresentano rispettivamente il lavoro compiuto quando la particella si muove lungo un arco circolare $PQ$ e lungo un segmento $QA$ del semiasse positivo delle ascisse. Risulta allora $w_{PQ} = 0$, mentre

$$w_{QA} = -\int_r^1 \frac{dx}{x} = \log r,$$

Figura 4.1:

e quindi

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2),$$

$$u'_x = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad u''_{xx} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$u'_y = \frac{y}{x^2+y^2}, \quad u''_{yy} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Da questo si ottiene allora l'equazione (4.3), che si chiama *equazione di Laplace*.

## 4.2 Definizioni principali

Sia $\Omega$ una regione del piano $(x,y)$. Una *equazione lineare alle derivate parziali del secondo ordine a coefficienti costanti*, nelle variabili indipendenti $x,y$ è una equazione della forma:

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_1\frac{\partial u}{\partial x} + b_2\frac{\partial u}{\partial y} + cu = f(x,y), \tag{4.4}$$

con $(x,y) \in \Omega$ e dove $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c$ sono coefficienti reali, con i prini tre non tutti nulli e $f$ è una fissata funzione definita in $\Omega$.

Una *soluzione* di (4.4) è una funzione $u(x,y)$ di classe $C^2(\Omega)$ che insieme alle sue derivate del primo e del secondo ordine soddisfano (4.4) in $\Omega$. La *soluzione generale* dell'equazione (4.4) è l'insieme di tutte le sue soluzioni.

Le equazioni lineari del secondo ordine possono essere classificate in base ai coefficienti delle derivate seconde. Ad esempio, per una equazione della forma:

$$au''_{xx} + 2bu''_{xy} + cu''_{yy} = 0$$

vale la classificazione: ellittica, se $ac - b^2 > 0$; parabolica se $ac - b^2 = 0$; iperbolica se $ac - b^2 < 0$.

Si noti che una delle ragioni che inducono a questa classificazione risiede nel fatto che le proprietà e i metodi di soluzione di questi tipi di equazioni possono essere notevolmente differenti.

Supponiamo ora che l'equazione (4.4) abbia coefficienti variabili, cioè almeno uno tra i coefficienti $a_{ij},\ b_i,\ c$ sia una funzione non costante di $(x, y)$, e che per ogni punto $(x, y) \in \Omega$, almeno uno tra i coefficienti $a_{ij} = a_{ij}(x, y)$ sia diverso da zero. Sia $P = (x, y)$ un punto fissato in $\Omega$. Allora l'equazione (4.4) può essere classificata *ellittica*, *parabolica*, *iperbolica* nel punto $P$ a seconda del segno di $a_{ij}(x, y)$ in accordo a quanto definito precedentemente.

**Esempi**

1. L'equazione di Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

è una equazione ellittica.

2. L'equazione del calore:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

è parabolica.

3. L'equazione delle onde:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

è una equazione iperbolica

4. L'*equazione di Tricomi*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

è ellittica se $x > 0$, parabolica se $x = 0$, iperbolica se $x < 0$.

Ciò che abbiamo visto in precedenza, si può estendere anche al caso in cui $\Omega$ è una regione di $I\!R^n$, con $n > 2$. Tuttavia nel seguito porremo l'attenzione essenzialmente al caso $m = 2$. Inoltre la regione $\Omega$ sarà per lo più di forma semplice, come ad esempio un rettangolo (limitato o no), oppure un semipiano, o un disco. Nei *problemi al contorno* che affronteremo, se non esplicitamente detto, assumeremo sempre che la soluzione (o una sua derivata) tende al dato valore al bordo quando $(x, y) \in \Omega$ si avvicina ad un punto della frontiera lungo la normale della curva frontiera nel punto considerato.

**Esempio**. Consideriamo il problema al contorno:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x > 0,\ t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & x > 0, \\ u(0, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

Qui, $\Omega$ è costituito dal primo quadrante del piano $(x, t)$. Una soluzione del problema è ovviamente la soluzione identicamente nulla, cioè $u(x, t) = 0$, per ogni $(x, t) \in \Omega$. Esso ha anche la soluzione:

$$v(x, t) = x t^{-3/2} e^{-x^2/(4t)}.$$

Infatti è un facile esercizio verificare che $v$ soddisfa l'equazione, mentre per le condizioni al bordo si ha:

$$\lim_{t \to 0} v(x, t) = 0,\ x > 0;\ \lim_{x \to 0} v(x, t) = 0,\ t > 0.$$

Un problema al contorno si dice *ben posto* se esso ha le seguenti proprietà:

1. Esiste una soluzione.
2. Questa soluzione è unica.
3. La soluzione è *stabile* cioè un piccolo cambiamento nelle condizioni alla frontiera induce soltanto un piccolo cambiamento nella soluzione.

Facciamo subito un esempio di un problema al contorno la cui soluzione non è stabile nel senso precisato sopra.

**Esempio**. Fissato un numero positivo $\varepsilon$, consideriamo il problema:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad t > 0, \\
&u(x,0) = 0, \quad x \in I\!R \\
&(*) \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \varepsilon \sin(x/\varepsilon), \quad x \in I\!R.
\end{aligned}$$

Esso ha la soluzione $u(x,t) = \varepsilon^2 \sinh(t/\varepsilon)\sin(x/\varepsilon)$ (fare una verifica diretta!). Risulta per ogni $t > 0$,

$$\max_{x\in I\!R} u(x,t) = \varepsilon^2 \sinh(t/\varepsilon) \to +\infty, \quad \varepsilon \to 0.$$

Ora, sostituiamo la $(*)$ con

$$(**) \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \quad x \in I\!R.$$

In tal caso otteniamo un problema che ha la soluzione $u(x,t) = 0$. Il secondo problema ha allora la proprietà che un piccolo cambiamento nei dati al bordo (per esempio passare da $(**)$ a $(*)$), può produrre un cambiamento arbitrariamente grande nella soluzione. Pertanto il suddetto problema (con $(**)$) non è ben posto. È facile rendersi conto come nelle applicazioni pratiche delle equazioni differenziali, nei quali i modelli sono determinati tramite misure che non possono essere precise, la mancanza di stabilità di un problema possa produrre risultati catastrofici!

## 4.3 L'equazione delle onde

Determiniamo la soluzione generale dell'equazione delle onde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t, x \in I\!R. \tag{4.5}$$

Se $u(x,t)$ è una soluzione della (4.5) allora essa è di classe $C^2(I\!R^2)$. Introduciamo ora il cambiamento di variabile:

$$\xi = x + t, \quad \tau = x - t,$$

e poniamo

$$v(\xi,\tau) = u(\frac{\xi+\tau}{2}, \frac{\xi-\tau}{2}).$$

La funzione $v$ è ancora di classe $C^2(I\!R^2)$, dove ora $I\!R^2$ denota il piano $(\xi, \tau)$. Usando il teorema della derivazione delle funzioni composte risulta facilmente (verificarlo):

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \tau} = 0. \tag{4.6}$$

Esistono allora una funzione $g(\tau)$ di classe $C^1(I\!R)$ e una funzione $G(\tau)$ di classe $C^2(I\!R)$ tali che

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = g(\tau), \quad \frac{\partial}{\partial \tau}(v - G) = 0.$$

Inoltre esiste una funzione $F(\xi)$ di classe $C^2(I\!R)$ tale che

$$v(\xi, \tau) - G(\tau) = F(\xi).$$

Segue allora che

$$u(x,t) = F(x+t) + G(x-t). \tag{4.7}$$

Pertanto una soluzione dell'equazione (4.5) ha necessariamente la forma (4.7). Viceversa è facile osservare che ogni funzione della forma (4.7) con $F, G$ di classe $C^2(I\!R)$ é soluzione della (4.5). Quindi (4.7) rappresenta di fatto l'integrale generale dell'equazione.

Consideriamo ora il seguente problema al contorno per l'equazione delle onde:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0,\ x \in I\!R, \\
&u(x,0) = u_0(x), \quad x \in I\!R, \\
&\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \quad x \in I\!R,
\end{aligned}$$

dove $u_0, u_1$ sono due assegnate funzioni di classe $C^2(I\!R)$ e $C^1(I\!R)$ rispettivamente. Proviamo che il suddetto problema è ben posto.

Supponiamo anzitutto che $u(x,t)$ sia una soluzione del problema. Allora esistono funzioni $f, g$ di classe $C^2(I\!R)$ tali che

$$u(x,t) = f(x+t) + g(x-t).$$

Sostituendo nelle condizioni al bordo, otteniamo

$$f(x) + g(x) = u_0(x), \quad f'(x) - g'(x) = u_1(x).$$

Ponendo $c = f(0) - g(0)$, dalla seconda ricaviamo

$$f(x) - g(x) = \int_0^x u_1(\xi) d\xi + c.$$

Pertanto si ottengono facilmente le relazioni

$$\begin{aligned} 2f(x) &= u_0(x) + \int_0^x u_1(\xi) d\xi + c \\ 2g(x) &= u_0(x) - \int_0^x u_1(\xi) d\xi - c \end{aligned}$$

e finalmente

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[u_0(x+t) + u_0(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(\xi) d\xi. \tag{4.8}$$

Una verifica diretta mostra che la funzione (4.8) verifica le condizioni al bordo e che la soluzione è unica. Supponiamo ora che $\varepsilon$ sia un arbitrario numero positivo e $\varepsilon_0(x)$, $\varepsilon_1(x)$ due funzioni di classe $C^2(I\!R)$ e $C^1(I\!R)$ rispettivamente, tali che $|\varepsilon_0(x)| < \varepsilon/2$ e

$$\left| \int_0^x \varepsilon_1(\xi) d\xi \right| < \varepsilon/2$$

per ogni $x \in I\!R$. Aggiungendo queste funzioni ai dati al bordo otteniamo un nuovo problema la cui soluzione $v(x,t)$ verifica

$$|v(x,t) - u(x,t)| < \varepsilon$$

per ogni $x \in I\!R$ e $t > 0$. La soluzione è allora stabile e il problema è quindi ben posto.

La formula (4.8) è detta *Formula di d'Alambert* per l'equazione delle onde. Tale formula mostra che il valore della soluzione $u(x,t)$ nel punto $(x,t)$ dipende dai valori che le funzioni $u_0$ e $u_1$ assumono sull'intervallo $[x-t, x+t]$, con $t > 0$.

Il problema al contorno precedente ha la seguente interpretazione fisica: si consideri una corda (di lunghezza infinita). Si denoti con $u(x,t)$ la deviazione del punto $x$ della corda dalla sua posizione di equilibrio al tempo $t$. Supponiamo che la funzione $u(x,t)$ soddisfi l'equazione (4.5). Supponiamo che al tempo $t = 0$ il punto $x$ abbia una deviazione pari a $u_0(x)$ dalla posizione di equilibrio e velocità $u_1(x)$. Il problema permette allora di determinare la deviazione $u(x,t)$ in $x$ in ogni istante $t > 0$.

Sempre riferendoci all'equazione delle onde, utilizzeremo ora un metodo diverso dal precedente, detto *separazione delle variabili*, che consiste nel determinare soluzioni della forma $u(x,t) = X(x)Y(t)$.

Consideriamo il seguente problema al contorno:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in ]0,\pi[, \; t > 0, \tag{4.9}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in ]0,\pi[, \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \quad x \in ]0,\pi[, \tag{4.11}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t > 0, \tag{4.12}$$

dove $u_0(x)$ e $u_1(x)$ sono date funzioni d classe $C^2[0,\pi]$ e $C^1[0,\pi]$ rispettivamente, tali che $u_0(0) = u_0(\pi) = 0$, $u_1(0) = u_1(\pi) = 0$ e $u_0''(0) = u_0''(\pi) = 0$.

Supponiamo che esistano una funzione $X(x)$, $x \in [0,\pi]$, con un numero finito di zeri (i punti $x_0,\ldots,x_m$) e una funzione $T(t)$, $t \geq 0$ con ancora un numero finito di zeri in ogni intervallo limitato ( diciamo i punti $t_0,\ldots,t_n,\ldots$), tali che la funzione

$$v(x,t) = X(x)T(t)$$

soddisfi alle condizioni (4.9) e (4.12). Allora in particolare risulta

$$X(0) = X(\pi) = 0.$$

Sia $\Omega_{\mu\nu}$ il rettangolo limitato dalle rette $x = x_\mu$, $x = x_{\mu+1}$ e $t = t_\nu$, $t = t_{\nu+1}$ (vedi fig.4.2). Allora $v(x,t) \neq 0$ in $\Omega_{\mu\nu}$. Introducendo nell'equazione la funzione $v(x,t)$ otteniamo:

$$X(x)T''(t) = X''(x)T(t),$$

e quindi esiste una costante $\lambda$ tale che in $\Omega_{\mu\nu}$ risulta

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda.$$

Figura 4.2:

Da ciò si ottengono le due equazioni differenziali ordinarie

$$X'' + \lambda X = 0 \tag{4.13}$$

$$T'' + \lambda T = 0. \tag{4.14}$$

Osserviamo ora che a due regioni $\Omega_{\mu\nu}$ adiacenti e separate da un segmento verticale, corrisponderà la stessa costante $\lambda$ perchè il rapporto $T''(t)/T(t)$ assume la stessa costante nelle due regioni. Lo stesso accade per due regioni adiacenti e separate da un segmento orizzontale, (si consideri il rapporto $X''(x)/X(x)$). Perciò le equazioni (4.13) e (4.14) sono entrambe valide su tutta la regione $]0,\pi[\times I\!R^+$. Usando allora la condizione $X(0) = X(\pi) = 0$ si vede facilmente che esiste un intero $n$ tale che $\lambda = n^2$ e $X(x) = A_n \sin nx$. Inoltre dalla (4.14) otteniamo

$$T(t) = a_n \cos nt + b_n \sin nt,$$

dove $a_n$ e $b_n$ sono costanti non entrambe nulle. Conglobando allora le costanti $A_n$ con $a_n$ e $b_n$ otteniamo l'espressione:

$$v(x,t) = (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \sin nx. \tag{4.15}$$

É facile verificare che la (4.15) verifica le (4.9) e (4.12). Inoltre per linearità anche ogni funzione della forma

$$w(x,t) = \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos \nu t + b_\nu \sin \nu t) \sin \nu x,$$

verifica l'equazione (4.9) e la (4.12). Per determinare allora le soluzioni che verificano anche le restanti condizioni (4.10) e (4.11), consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \sin nx.$$

Mostriamo ora che se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono i coefficienti di Fourier relativi agli sviluppi in serie di soli seni

$$u_0(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \quad u_1(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} nb_n \sin nx,$$

la serie rappresenta allora l'unica soluzione del problema. In tal caso infatti, la serie verifica le condizioni (4.10), (4.11) e (4.12).

A tale scopo denotiamo con $\widetilde{u}_0(x)$ l'estensione $2\pi-$periodica dispari della funzione $u_0(x),\ x \in [0,\pi]$. Definiamo analogamente $\widetilde{u}_1(x)$. Utilizzando allora i risultati sulle serie di Fourier (Capitolo 1), risulta per ogni $x \in I\!R$

$$\widetilde{u}_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \quad \widetilde{u}_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nb_n \sin nx. \tag{4.16}$$

Le due funzioni in (4.16) sono rispettivamente di classe $C^2(I\!R)$ e $C^1(I\!R)$, pertanto utlilizzando la formula di d'Alambert, per le funzioni $\widetilde{u}_0$ e $\widetilde{u}_1$ risulta, integrando termine a termine

$$\begin{aligned}
\widetilde{u}(x,t) &= \frac{1}{2}[\widetilde{u}_0(x+t)+\widetilde{u}_0(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\widetilde{u}_1(\xi)d\xi \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\sin n(x+t)+\sin n(x-t)}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\cos n(x+t)-\cos n(x-t)}{2} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)\sin nx.
\end{aligned}$$

Quindi la funzione definita dalla serie:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)\sin nx$$

è la soluzione richiesta.

É possibile anche dimostrare che il problema al contorno ora studiato è ben posto secondo la definizione precedente.

Il problema trattato ha la seguente interpretazione fisica. Supponiamo che una corda uniforme abbia i suoi estremi fissati nei punti 0 e $\pi$ dell'asse $x$ e che le sue vibrazioni soddisfino l'equazione delle onde (4.5). Supponiamo inoltre che la posizione e la velocità iniziali (al tempo $t=0$) siano date, per ogni punto $x$ della corda, dalle funzioni $u_0, u_1$. Supponendo che non ci sia attrito agli estremi, il problema al contorno precedente descrive in ogni istante il moto della corda, cioè misura la deviazione della corda dalla posizione di riposo in ogni suo punto.

## 4.4 L'equazione del calore

In questa sezione studiamo alcuni problemi al contorno relativi all'equazione del calore

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in I\!R,\ t > 0. \tag{4.17}$$

Determiniamo la soluzione del problema al contorno per l'equazione (4.17), con il dato:

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in I\!R \tag{4.18}$$

Supporremo inoltre che la soluzione $u(x,t)$ sia una funzione continua e limitata, (cioè cercheremo soluzioni che soddisfano queste proprietà). Qui $u_0(x)$ è un'assegnata funzione continua e limitata in $I\!R$.

Nel seguito utilizzeremo la trasformata di Fourier. Questo implica alcune condizioni ulteriori da imporre alle funzioni $u$ e $u_0$. In particolare assumeremo che $u(\cdot,t)$, $u'_x(\cdot,t)$, $u''_{xx}(\cdot,t)$ e $u'_t(\cdot,t)$ siano funzioni assolutamente integrabili in $I\!R$ per ogni $t > 0$ e infine che $u_0$ sia assolutamente integrabile in $I\!R$.

Supponiamo allora che $u(x,t)$ sia una soluzione di classe $C^2$ del problema al contorno. Consideriamo la trasformata di Fourier $\widehat{u}(\lambda,t)$ rispetto alla variabile $x \in I\!R$, per ogni $t > 0$. Si osservi che, dalle ipotesi, tale trasformata è ben definita. Si ha:

$$\widehat{u}(\lambda,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t) e^{-i\lambda x} dx,$$

ed utilizzando (formalmente) un teorema di derivazione sotto il segno di integrale si ha anche

$$\frac{\partial}{\partial t}\widehat{u}(\lambda,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) e^{-i\lambda x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) e^{-i\lambda x} dx.$$

Integrando ora per parti due volte, tenendo conto della integrabilità delle funzioni $u''_{xx}$ e $u'_x$, otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\widehat{u}(\lambda,t) &= (i\lambda) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} u(x,t) e^{-i\lambda x} dx \\ &= (i\lambda)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t) e^{-i\lambda x} dx = -\lambda^2 \widehat{u}(\lambda,t). \end{aligned}$$

Supponiamo che, indicata con $\widetilde{u_0}(\lambda)$ la trasformata di Fourier di $u_0$, risulti $\widehat{u}(\lambda, t) \to \widehat{u_0}$ per $t \to 0^+$, per ogni $\lambda \in I\!R$. Allora otteniamo il problema di Cauchy (per equazioni ordinarie):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\widehat{u}(\lambda, t) + \lambda^2 \widehat{u}(\lambda, t) = 0 \\
&\widehat{u}(\lambda, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x) e^{-i\lambda x} dx.
\end{aligned}$$

Questo problema ha soluzione

$$\widehat{u}(\lambda, t) = \widehat{u}(\lambda, 0) e^{-\lambda^2 t}.$$

Usiamo ora l'esempio (d) del paragrafo 2.1:

$$f(x) = e^{-ax^2} \Longrightarrow \widehat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\lambda^2/(4a)}.$$

Posto allora $a = 1/(4t)$ si ottiene

$$\widehat{f}(\lambda) = \sqrt{2t} e^{-\lambda^2 t}.$$

Usando allora il teorema di convoluzione e la formula di inversione (vedi Cap.2), si ha:

$$u(x, t) = u_0(x) * \frac{1}{\sqrt{2t}} e^{-x^2/4t},$$

cioè

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(y) e^{-(x-y)^2/(4t)} dy. \tag{4.19}$$

La (4.19) rappresenta la forma finale della soluzione del problema. Pertanto se una soluzione esiste essa deve avere la forma (4.19). Tuttavia il ragionamento seguito presuppone l'esistenza a priori della soluzione. Resta da provare quindi che la soluzione esiste. Questo si può fare per verifica diretta, mostrando che la (4.19) è effettivamente una soluzione (ciò non è del tutto immediato, la prova è omessa). Inoltre la funzione trovata è di classe $C^2$ ed è limitata in tutto l'insieme $I\!R \times I\!R^+$.

Per provare teoremi di unicità delle soluzioni di problemi al contorno per l'equazione del calore, è spesso utile il seguente *principio di massimo*:

**Teorema 5** *Sia $\Omega$ il rettangolo aperto $]a,b[\times]0,T[$ del piano $(x,t)$. Denotiamo con $\partial\Omega$, la frontiera di $\Omega$ e con $\overline{\Omega}$ la sua chiusura. Sia $S$ la parte di $\partial\Omega$ situata sui lati $t=0$, $x=a$, $x=b$. Sia $S'=\partial\Omega\setminus S$. Supponiamo che $u(x,t)$ sia una funzione continua, con dominio $\overline{\Omega}$ e che $u(x,t)$ soddisfi all'equazione del calore $u'_t=u''_{xx}$ sull'insieme $\Omega\cup S'$. Allora $u(x,t)$ assume il suo massimo e il suo minimo su $S$.*

La dimostrazione è omessa.

Determiniamo ora, con l'ausilio del metodo della separazione delle variabili, la soluzione del seguente problema al contorno per l'equazione del calore.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x\in I\!R,\ t>0,\\
&u(x,0)=u_0(x), \quad 0<x<\pi\\
&u(0,t)=u(\pi,t)=0, \quad t>0,
\end{aligned}$$

dove la funzione $u_0(x)$ appartiene alla classe $C^2[0,\pi]$ e soddisfa alle condizioni:

$$u_0(0)=u_0(\pi)=u_0''(0)=u_0''(\pi)=0.$$

Supporremo a priori che la soluzione $u(x,t)$ sia continua sull'insieme $[0,\pi]\times I\!R_0^+$.

Utilizzando la separazione delle variabili, ragionando come per l'equazione delle onde, cerchiamo soluzioni della forma

$$v(x,t)=X(x)T(t), \quad X(0)=X(\pi)=0.$$

Si perviene alle equazioni ordinarie

$$X''+\lambda X=0, \quad T'+\lambda T=0,$$

dove per $\lambda$ si trovano i valori $\lambda=n^2$, $n\in I\!N$. Pertanto si ottengono le funzioni

$$X(x)=a_n\sin nx,\ T(t)=b_n e^{-n^2t},$$

dove $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono successioni di coefficienti. Conglobando questi coefficienti, otteniamo una famiglia di funzioni del tipo

$$v(x,t)=A_n e^{-n^2t}\sin nx.$$

Per ottenere la soluzione del problema al contorno, si determinano i coefficienti $\{A_n\}$ in modo che valga lo sviluppo di Fourier

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx,$$

ottenendo la soluzione

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n^2 t} \sin nx.$$

Si può ora mostrare che quella ottenuta è realmente una soluzione (per verifica diretta) e che essa è unica. Per l'unicità infatti, supponiamo che il suddetto problema abbia due soluzioni e denotiamo con $U(x,t)$ la loro differenza. Allora $U$ è ancora soluzione del problema, ad eccezione del fatto che ora si ha $U(x,0) = 0$, per $x \in ]0,\pi[$. Il principio di massimo applicato alla funzione $U$ mostra che deve necessariamente essere $U(x,t) = 0$ per ogni $(x,t) \in [0,\pi] \times \mathbb{R}_0^+$. Quindi la soluzione è unica.

Infine può essere mostrato che la soluzione è stabile e quindi il suddetto problema è ben posto.

## 4.5 L'equazione di Laplace

Ricordiamo che l'equazione di Laplace è un'equazione ellittica del secondo ordine della forma

$$\Delta u(x,y) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad x, y \in \mathbb{R}. \tag{4.20}$$

Iniziamo subito la trattazione dei problemi al contorno legati all'equazione di Laplace con il seguente *principio di massimo*:

**Teorema 6** *Sia $\Omega$ una regione limitata del piano $(x,y)$ con frontiera $\partial\Omega$ e sia $\overline{\Omega}$ la sua chiusura. Sia $u(x,y)$ una funzione continua definita su $\overline{\Omega}$, soluzione dell'equazione di Laplace (4.20) in $\Omega$. Allora $u(x,y)$ assume il suo massimo e il suo minimo su $\partial\Omega$.*

**Dimostrazione**. Il massimo e il minimo assoluti della funzione $u$ sulla frontiera di $\Omega$ esistono per il teorema di Weierstrass, essendo la frontiera di $\Omega$ un compatto. E' intanto ovvio che se se una funzione $u \in C^2(\Omega)$ verifica la condizione $\Delta u > 0$ per ogni $(x,y) \in \Omega$, allora evidentemente il valore massimo non puó essere assunto in un punto interno, perché altrimenti, in quel punto, si avrebbe necessariamente $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \le 0$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \le 0$. Ora, considerata la (4.20), dato $\varepsilon > 0$, definiamo la funzione ausiliaria

$$v_\varepsilon(x,y) = u(x,y) + \varepsilon(x^2+y^2), \quad (x,y) \in \Omega.$$

Allora $\Delta v_\varepsilon(x,y) = \Delta u(x,y) + 4\varepsilon = 4\varepsilon > 0$ e quindi per quanto detto sopra $v_\varepsilon(x,y)$ assume massimo asoluto in un punto $(\overline{x},\overline{y}) \in \partial\Omega$. Si ha:

$$v_\varepsilon(x,y) \le \max\{v_\varepsilon(x,y) : (x,y) \in \partial\Omega\} \le M + \varepsilon R^2,$$

dove $M = \max_{\partial\Omega} u(x,y)$ e $R$ é il raggio di una circonferenza che contiene $\overline{\Omega}$. Ció implica che

$$u(x,y) + \varepsilon(x^2+y^2) \le M + \varepsilon R^2$$

e passando al limite per $\varepsilon \to 0$, si ottiene $u(x,y) \le M$, cioé l'asserto. Per il minimo assoluto si procede in modo analogo, considerando prima il caso $\Delta u < 0$ e poi considerando la funzione ausiliaria $v_\varepsilon(x,y) = u(x,y) - \varepsilon(x^2+y^2)$.

Sia $\Omega$ una regione limitata del piano $(x,y)$ con frontiera $\partial\Omega$. Il *problema di Dirichlet* per $\Omega$ è un problema al contorno del tipo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x,y) \in \Omega \tag{4.21}$$

$$u(x,y) = u_0(x,y), \quad (x,y) \in \partial\Omega, \tag{4.22}$$

dove $u_0$ è una data funzione con dominio $\partial\Omega$.

Il problema di Dirichlet ha numerose interpretazioni fisiche. Ad esempio, esso costituisce un modello matematico per risolvere il seguente problema: trovare la temperatura in ogni punto di una lamina uniforme $\Omega$ quando è nota la temperatura in ogni punto del suo bordo, assumendo che la temperatura sia stazionaria (non varia cioè nel tempo).

A titolo di esempio determiniamo la soluzione del seguente problema di Dirichlet:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad x^2+y^2 < 1 \tag{4.23}$$

$$u(cos\theta, \sin\theta) = f(\theta), \quad \theta \in I\!R, \tag{4.24}$$

dove $f$ è una funzione data di classe $C^2(\mathbb{R})$, periodica e di periodo $2\pi$.

Supporremo a priori che la soluzione $u$ sia una funzione continua nel disco unitario chiuso. Utilizzeremo il metodo della separazione delle variabili, dopo aver fatto un cambiamento di variabili.

Scrivendo l'equazione (4.23) in coordinate polari $r, \theta$ otteniamo per il teorema di derivazione delle funzioni composte:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \quad 0 < r < 1, \ \theta \in \mathbb{R}, \tag{4.25}$$

$$u(1, \theta) = f(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}, \tag{4.26}$$

$$u(0, \theta) \text{ è costante per } \theta \in \mathbb{R} \tag{4.27}$$

$$u(r, \theta + 2\pi) = u(r, \theta), \quad 0 < r < 1, \ \theta \in \mathbb{R}. \tag{4.28}$$

Cerchiamo soluzioni del problema del tipo

$$v(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta).$$

Procedendo come al solito otteniamo le due equazioni ordinarie

$$\Theta'' + \lambda\Theta = 0, \quad r^2 R'' + rR' - n^2 R = 0.$$

Per la prima, in corrispondenza ai valori di $\lambda = n^2$, $n \in \mathbb{N}$, otteniamo le soluzioni:

$$\Theta(\theta) = \frac{a_0}{2}, \quad n = 0; \quad \Theta(\theta) = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta, \quad n > 0,$$

dove $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono coefficienti reali. Per la seconda equazione si ha:

$$R = c_1 + c_2 \log r, \quad \text{con } c_1 = 1, \ c_2 = 0, \quad \text{se } n = 0,$$
$$R = c_1 r^n + c_2 r^{-n}, \quad \text{con } c_1 = 1, \ c_2 = 0, \quad \text{se } n > 0.$$

Così si ottengono soluzioni della forma

$$v(r, \theta) = \frac{a_0}{2}, \quad \text{se } n = 0$$
$$v(r, \theta) = r^n(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta), \quad \text{se } n > 0$$

Per selezionare la soluzione che verifica il dato al bordo, si determinano i coefficienti $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ in modo che valga lo sviluppo di Fourier

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta),$$

ottenendo infine la soluzione

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta).$$

Si verifica ora, direttamente, che $u(r,\theta)$ è effettivamente una soluzione del problema di Dirichlet.

Supponiamo che ci siano due soluzioni e sia $U(x,t)$ la loro differenza. Allora $U$ è ancora soluzione del problema di Dirichlet, salvo che la condizine al bordo è ora data da $U(\cos\theta, \sin\theta) = 0, \ \theta \in I\!R$. Allora per il principio di massimo per l'equazione di Laplace si ha necessariamente $U = 0$, da cui segue l'unicità.

È possibile mostrare infine che il problema di Dirichlet è ben posto.

## 4.6 Il problema di Dirichlet per il semipiano

Il problema consiste nel determinare la distribuzione di temperatura su una lamina bidimensionale infinita, assimilabile ad un semipiano, nota la temperatura lungo il bordo. Se $u(x,y), \quad (x,y) \in I\!R \times I\!R^+$, rappresenta la temperatura nel punto $(x,y)$, e se $f : I\!R \to I\!R$ é la distribuzione iniziale di temperatura sull'asse $x$, il problema consiste nel determinare la soluzione dell'equazione:

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

in $I\!R \times I\!R^+$ con una condizione iniziale del tipo $u(x,0) = f(x), \quad x \in I\!R$.
Il metodo che seguiremo fará uso della trasformata di Fourier in $I\!R$ (questo dipende dalla forma del dominio di $u(x,y)$).
Supporremo $u \in C^2(I\!R \times I\!R^+)$ con $u(\cdot,y), \ \frac{\partial u}{\partial x}(\cdot,y), \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\cdot,y), \ \frac{\partial u}{\partial y}(\cdot,y), \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\cdot,y) \in L^1(I\!R)$, ed inoltre:

(+) $\|u(\cdot,y)\|_1 \le M$, per ogni $y \in I\!R^+$, per qualche $M > 0$.

(++) Esistono funzioni $g, h \in L^1(I\!R)$ tali che:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right| \le g(x), \quad \left|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)\right| \le h(x),$$

per ogni $(x,y) \in I\!R \times I\!R^+$.

Infine, interpreteremo il dato al bordo, supponendo $f \in L^1(I\!R)$ e :

$$\lim_{y \to 0^+} \|u(\cdot, y) - f(\cdot)\|_1 = 0.$$

Applichiamo ora la trasformata di Fourier alla funzione $u(\cdot, y)$ come funzione di $x$. Usando il fatto che $u$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in L^1(I\!R)$ rispetto ad $x$, otteniamo, per la proprietá della trasformata delle derivate successive:

$$\widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}(\lambda, y) = -\lambda^2 \widehat{u}(\lambda, y), \quad \lambda \in I\!R, \quad y > 0.$$

Inoltre dalle (++), usando un teorema di derivazione sotto il segno di integrale, si ha:

$$\widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}(\lambda, y) = \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial y^2}(\lambda, y), \quad \lambda \in I\!R, \quad y > 0.$$

L'equazione $\Delta u = 0$ diventa allora:

$$\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial y^2}(\lambda, y) - \lambda^2 \widehat{u}(\lambda, y) = 0, \quad \lambda \in I\!R, \quad y > 0. \tag{4.29}$$

La (4.29) é una equazione differenziale ordinaria, dipendente dal parametro, la cui funzione incognita é $z(y) = u(\lambda, y)$. L'equazione é lineare del secondo ordine a coefficienti costanti (rispetto ad $y$). La soluzione generale é allora:

$$\widehat{u}(\lambda, y) = \begin{cases} A(\lambda)e^{\lambda y} + B(\lambda)e^{-\lambda y} & \lambda \neq 0 \\ A(0) + B(0)y & \lambda = 0, \end{cases}$$

dove $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ sono coefficienti (dipendenti dal parametro $\lambda$). Occorre ora determinare $A(\lambda)$, $B(\lambda)$.
Dalla (+), $|\widehat{u}(\lambda, y)| \leq M$, per ogni $\lambda \in I\!R$, $y \in I\!R^+$ e quindi per $y \to +\infty$, $A(\lambda) = 0$, se $\lambda > 0$, $B(\lambda) = 0$, se $\lambda \leq 0$.
Inoltre la condizione al bordo diventa (Teorema 4 del Capitolo 2):

$$\lim_{y \to 0^+} \|\widehat{u}(\lambda, y) - \widehat{f}(\lambda)\|_\infty = 0.$$

Ció implica che $A(\lambda) + B(\lambda) = \widehat{f}(\lambda)$, per ogni $\lambda \in I\!R$; pertanto se $u(x, y)$ é una soluzione del problema, la sua trasformata di Fourier é data da:

$$\widehat{u}(\lambda, y) = \widehat{f}(\lambda)e^{-|\lambda| y}, \quad \lambda \in I\!R, \quad y > 0.$$

Poiché $\widehat{u}(\cdot, y) \in L^1(I\!R)$, usando il teorema di inversione della trasformata di Fourier, otteniamo:

$$u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y|\lambda|} \widehat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda.$$

Adoperando il risultato dell'esempio c) del Capitolo 2, otteniamo infine:

$$u(x,y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x-s)}{y^2+s^2} ds. \tag{4.30}$$

Infine si verificherá direttamente che quella ottenuta é effettivamente soluzione dell'equazione $\Delta u = 0$, con il dato iniziale stabilito. L'integrale nella (4.30) si chiama *integrale singolare di Poisson-Cauchy*.