UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Ingegneria Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 07.02.2019

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea____________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x}$$

specificando: dominio, segno, eventuali intersezioni con gli assi, asintoti, dominio della derivata prima, massimi e minimi relativi ed assoluti, dominio della derivata seconda, flessi disegnando infine il grafico.

2. Se f é la funzione dell'esercizio 1, discutere la convergenza (semplice ed assoluta) della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n f\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

3. Se f é la funzione dell'esercizio 1, determinare l'area della regione del piano sottesa dal grafico di f sull'intervallo $[1/2, 1]$.

Svolgimento

1. Il dominio della funzione é l'insieme $D = I\!R \setminus \{0,3\}$. Si ha $f(x) > 0$ per ogni $x \in]-\infty,-1[\cup]0,1[\cup]3,+\infty[$ e $f(x) < 0$ se e solo se $x \in]-1,0[\cup]1,3[$. Infine la funzione si annulla nei punti $x = \pm 1$. Non ci sono intersezioni con l'asse delle y.

Per quanto riguarda la ricerca di eventuali asintoti si ha:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty, \ \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty, \ \lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty.$$

Pertanto le rette $x = 0$ e $x = 3$ sono asintoti verticali. Infine

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1,$$

e quindi la retta $y = 1$ é asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$. Non esistono asintoti obliqui.

Valutiamo ora la derivata prima. Risulta, per $x \in D$,

$$f'(x) = \frac{-3x^2 + 2x - 3}{(x^2 - 3x)^2}.$$

La derivata non si annulla mai in D ed é sempre negativa. Quindi la funzione f risulta decrescente negli intervalli $]-\infty,0[$, $]0,3[$ e $]3,+\infty[$. Non esistono pertanto estremi relativi e/o assoluti.

Valutiamo ora la derivata seconda. Dopo qualche calcolo si ha in D

$$f''(x) = \frac{6(x^3 - x^2 + 3x - 3)}{(x^2 - 3x)^3}.$$

La derivata seconda si annulla in $x = 1$ e $f(1) = 0$. Dallo studio del segno, é facile vedere che f é concava negli intervalli $]-\infty,0[$ e $[1,3[$, mentre é convessa negli intervalli $]0,1]$ e $]3,+\infty[$. Il punto $x = 1$ é quindi un punto di flesso. Il grafico puó ora essere tracciato facilmente

2. La serie da studiare é
$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{2n-1}{2n^2-n-1}.$$
Utilizzando lo studio della funzione, é facile vedere che la successione
$$a_n=\frac{2n-1}{2n^2-n-1}$$
é a termini positivi, decrescente e infinitesima. Pertanto la serie é a segni alterni e converge per il criterio di Leibniz. Tuttavia, non converge la serie dei valori assoluti
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n-1}{2n^2-n-1}.$$
Infatti, utilizzando il criterio degli infinitesimi con $p=1$ si ha
$$\lim_{n\to+\infty} na_n=1,$$
e quindi la serie assoluta diverge.

3. Occorre determinare l'integrale
$$A=\int_{1/2}^{1}\frac{x^2-1}{x^2-3x}dx.$$
Valutiamo prima l'integrale indefinito sull'intervallo considerato. Si ha, per $x\in[1/2,1]$,
$$\begin{aligned}\int\frac{x^2-1}{x^2-3x}dx &= \int\frac{x}{x-3}dx-\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x}\right)dx\\ &= x+3\log|x-3|-\frac{1}{3}\log|x-3|+\frac{1}{3}\log x+c\\ &= x+\frac{8}{3}\log(3-x)+\frac{1}{3}\log x+c.\end{aligned}$$
L'area é allora data da:
$$\begin{aligned}A &= \left[x+\frac{8}{3}\log(3-x)+\frac{1}{3}\log x\right]_{1/2}^{1}\\ &= \frac{1}{2}+3\log 2-\frac{8}{3}\log\frac{5}{2}=\frac{1}{2}+\frac{17}{3}\log 2-\frac{8}{3}\log 5.\end{aligned}$$