UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
del 12.01.2017

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**_________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1-\log x}{1+\log x}\right)$$

determinandone il dominio, il segno, le intersezioni con gli assi, gli eventuali asintoti, crescenza, decrescenza, massimi, minimi relativi, convessitá, concavitá, flessi e tracciare infine un grafico.

2. Studiare convergenza semplice ed assoluta della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n f\left(e^{\frac{n+1}{n}}\right)$$

dove f é la funzione dell'esercizio 1.

3. Se f é la funzione dell'esercizio 1, determinare il limite

$$A = \lim_{\varepsilon\to(1/e)^+}\int_{\varepsilon}^{e}\frac{f(x)}{x}dx.$$

Cosa rappresenta il valore A?

Svolgimento

1. Studio della funzione.

(a) Il dominio della funzione é l'insieme $D = \{x \in I\!R : x > 0, x \neq 1/e\}$.

(b) Si ha $f(x) = 0$ se e solo se $x = e$, che é l'unica intersezione con l'asse delle x, mentre $f(x) > 0$ se e solo se

$$\frac{1-\log x}{1+\log x} > 0$$

cioé se e solo se $x \in]1/e, e[$. Se $x \in]0, 1/e[\cup]1/e, +\infty[$ risulta invece $f(x) < 0$.

(c) Si ha:

$$\lim_{x\to 0^+} \arctan\left(\frac{1-\log x}{1+\log x}\right) = \lim_{t\to -\infty} \arctan\left(\frac{1-t}{1+t}\right) = -\frac{\pi}{4}.$$

$$\lim_{x\to (1/e)^-} \arctan\left(\frac{1-\log x}{1+\log x}\right) = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to (1/e)^+} \arctan\left(\frac{1-\log x}{1+\log x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

$$\lim_{x\to +\infty} \arctan\left(\frac{1-\log x}{1+\log x}\right) = -\frac{\pi}{4}.$$

Pertanto non esistono asintoti verticali, né obliqui, mentre la retta $y = -\pi/4$ é un asintoto orizzontale.

(d) La derivata prima, che esiste in tutti i punti di D, é data dalla

$$f'(x) = -\frac{1}{x + x\log^2 x}, \quad x \in D.$$

Pertanto in D risulta sempre $f'(x) < 0$ e quindi la funzione f risulta decrescente negli intervalli $]0, 1/e[$ e $]1/e, +\infty[$. Non esistono dunque massimi o minini relativi. Per completare lo studio della derivata prima, si ha:

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to (1/e)^\pm} f'(x) = -e/2.$$

(e) La derivata seconda, che esiste in tutti i punti di D é data dalla:

$$f''(x) = \frac{(1+\log x)^2}{x^2(1+\log^2 x)^2}, \quad x \in D.$$

Pertanto $f''(x) > 0$ in ogni punto e dunque f é convessa negli intervalli $]0, 1/e[$ e $]1/e, +\infty[$. Non esistono pertanto punti di flesso.

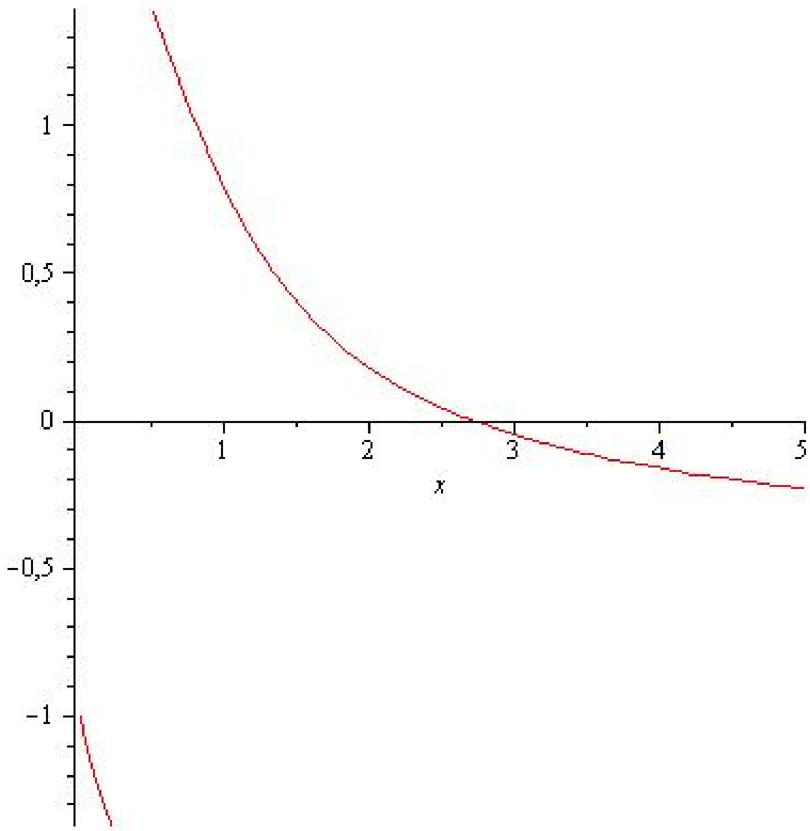

Figure 1: il grafico della funzione f.

Il grafico ora puó essere tracciato.

2. Comportamento della serie.

La serie da studiare é:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \arctan\left(-\frac{1}{2n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \arctan\left(\frac{1}{2n+1}\right).$$

La serie é dunque a segni alterni. Dallo studio del grafico della funzione f si deduce subito che la successione

$$a_n = \arctan\left(\frac{1}{2n+1}\right)$$

é decrescente ed infinitesima e quindi applicando il criterio di Leibniz la serie risulta convergente. Per la convergenza assoluta osserviamo che la serie (assoluta)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{2n+1}\right)$$

risulta divergente. Infatti applicando il criterio degli infinitesimi, e il limite notevole $\lim_{t\to 0} \frac{\arctan t}{t} = 1$, si vede facilmente che

$$\lim_{n\to+\infty} na_n = 1/2.$$

La serie risulta quindi semplicemente convergente.

3. Determiniamo anzitutto le primitive della funzione $f(x)/x$ sull'intervallo $]1/e, +\infty[$. Si ha, ponendo prima $\log x = t$ e successivamente integrando per parti:

$$\begin{aligned}
\int \frac{f(x)}{x}dx &= \int \frac{1}{x} \arctan\left(\frac{1-\log x}{1+\log x}\right)dx \\
&= \int \arctan\left(\frac{1-t}{1+t}\right)dt = t\arctan\left(\frac{1-t}{1+t}\right) + \int \frac{t}{1+t^2}dt \\
&= t\arctan\left(\frac{1-t}{1+t}\right) + \frac{1}{2}\log(1+t^2) + c.
\end{aligned}$$

Pertanto la famiglia delle primitive é:

$$\log x \arctan\left(\frac{1-\log x}{1+\log x}\right) + \frac{1}{2}\log(1+\log^2 x) + c.$$

Quindi risulta:

$$\int_{\varepsilon}^{e} \frac{f(x)}{x}dx = \log\sqrt{2} - \left[\log\varepsilon \arctan\left(\frac{1-\log\varepsilon}{1+\log\varepsilon}\right) + \log\sqrt{1+\log^2\varepsilon}\right].$$

Passando dunque al limite per $\varepsilon \to (1/e)^+$ si ottiene $A = \pi/2$. Tale numero rappresenta l'area della regione del piano sottesa dal grafico della funzione $f(x)/x$ sull'intervallo $]1/e, e]$.