UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Ingegneria Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
Prova del 17.01.2019

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione ______________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare la funzione
$$f(x) = \frac{x^4 + x^2}{x^4 + 1}$$
specificando: dominio, segno, eventuali intersezioni con gli assi, asintoti, dominio della derivata prima, massimi e minimi relativi ed assoluti, e disegnando infine il grafico. Non é richiesto lo studio della derivata seconda. (Facoltativo: dedurre dallo studio precedente l'esistenza di punti di flesso).

2. Se f é la funzione dell'esercizio 1, discutere la convergenza della serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(f\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right)^n$$
e, nel caso di convergenza, determinare la somma S.

3. Se f é la funzione dell'esercizio 1, determinare l'area della regione del piano sottesa dal grafico della funzione $g(x) = f(\sqrt{x})$ sull'intervallo $[0, 1]$.

Svolgimento

1. Il dominio della funzione é l'insieme $D = I\!R$. Si ha $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in D$ e $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$. Pertanto, il punto $(0,0)$ é l'unica intersezione con gli assi. Da ció si deduce anche che $x = 0$ é un punto di minimo assoluto. La funzione risulta anche simmetrica rispetto all'asse y.

Per quanto riguarda la ricerca di eventuali asintoti si ha:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1,$$

pertanto la retta $y = 1$ é un asintoto orizzontale sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$. Non ci sono altri asintoti.

Valutiamo ora la derivata prima. Risulta, per $x \in D$,

$$f'(x) = -\frac{2x(x^4 - 2x^2 - 1)}{(x^4+1)^2}.$$

La derivata prima si annulla per $x = 0$ (che é punto di minimo assoluto, come giá detto), e per $x = \pm\sqrt{1+\sqrt{2}}$. Sfruttando la simmetria, é facile vedere che la f é crescente per negli intervalli $]-\infty, -\sqrt{1+\sqrt{2}}]$ e $[0, \sqrt{1+\sqrt{2}}]$ ed é decrescente negli intervalli $[-\sqrt{1+\sqrt{2}}, 0]$ e $[\sqrt{1+\sqrt{2}}, +\infty[$. Dunque i punti $x = \pm\sqrt{1+\sqrt{2}}$ sono punti di massimo relativo e risulta: $f(\pm\sqrt{1+\sqrt{2}}) = (4+3\sqrt{2})/(4+2\sqrt{2}) > 1$. Da ció si deduce anche che tali punti sono punti di massimo assoluto.

Dallo studio precedente, si deduce subito l'esistenza di due punti di flesso rispettivamente (data la simmetria) a sinistra del punto $x = -\sqrt{1+\sqrt{2}}$ e a destra del punto $x = \sqrt{1+\sqrt{2}}$. Il grafico puó essere ora tracciato agevolmente.

2. La serie da studiare é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

É una serie geometrica di ragione $3/5 < 1$ e quindi essa é convergente e la sua somma é

$$S = \frac{1}{1-(3/5)} = \frac{5}{2}.$$

3. Occorre determinare l'integrale

$$A = \int_0^1 f(\sqrt{x})dx = \int_0^1 \frac{x^2+x}{x^2+1}dx.$$

Si ha facilmente:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^2+x}{x^2+1}dx &= \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx \\ &= \left[x - \arctan x + \frac{1}{2}\log(x^2+1)\right]_{x=0}^{x=1} = 1 - \frac{\pi}{4} + \log\sqrt{2}.\end{aligned}$$