UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Ingegneria Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 22.06.2017

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare l'esattezza della forma differenziale lineare

$$\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}dx + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}dy$$

ed eventualmente determinarne le primitive. Infine calcolare quella primitiva che si annulla nel punto $(1, 1)$.

2. Determinare l'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale

$$xy'' - (x + 1)y' + y = 0$$

sull'insieme $x > 0$. Infine trovare tutte le soluzioni che tendono a zero per $x \to 0^+$.

3. Calcolare il baricentro dell'insieme definito dal cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio 1 contenuto nel primo quadrante, assumendo la densitá $\delta(x, y) = xy$.

Svolgimento

1. La forma differenziale lineare é definita nell'insieme $R\backslash\{(0,0)\}$. Proviamo la chiusura, si ha

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{2y^3 - 6x^2 y}{(x^2+y^2)^3} = \frac{\partial Y}{\partial x}.$$

La forma differenziale é quindi chiusa ma non possiamo dedurre subito che é esatta visto che il dominio ha una lacuna. Tuttavia, osserviamo che le funzioni componenti il campo vettoriale sono omogenee dello stesso grado $\alpha = -2$ e pertanto la forma é esatta. Per determinare poi la famiglia dei potenziali é sufficiente frar ricorso alla formula

$$F(x,y) = \frac{xX(x,y) + yY(x,y)}{\alpha+1} + C = -\frac{x}{x^2+y^2} + C.$$

Infine imponendo la condizione $F(1,1) = 0$ si ottiene $C = 1/2$.

2. Si tratta di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti non costanti. Si vede facilmente che la funzione $y = e^x$ é una soluzione. Normalizzando l'equazione dividendo per x si ottiene

$$y'' - (1+\frac{1}{x})y' + \frac{1}{x}y = 0$$

Per determinare una seconda soluzione linearmente indipendente utilizziamo la nota formula

$$\begin{aligned} y_2 &= e^x \int \frac{e^{\int (1+\frac{1}{x})dx}}{e^{2x}}dx = e^x \int \frac{e^{x+\log x}}{e^{2x}}dx = e^x \int \frac{e^x x}{e^{2x}}dx \\ &= e^x \int xe^{-x}dx = e^x(-xe^{-x} - e^{-x}) = -x-1. \end{aligned}$$

Quindi la famiglia di soluzioni per $x > 0$, é $y = C_1 e^x + C_2(-x-1)$, C_1, C_2 costanti arbitrarie. Passando al limite per $x \to 0^+$ si ottiene facilmente che le soluzioni che tendono a zero sono date da $y(x) = C(e^x - x - 1)$, con C costante arbitraria.

3. Calcoliamo anzitutto la massa m di D. Si ha facilmente

$$m = \iint_D xy dxdy = \frac{1}{8}.$$

Indicate con $(\overline{x}, \overline{y})$ le coordinate del baricentro, si ha:

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= 8 \iint_D x^2 y dx dy = 8 \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \varrho^4 \cos^2 t \sin t d\varrho dt \\
&= 8 \int_0^1 \varrho^4 d\varrho \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin t dt = \frac{8}{15}.
\end{aligned}$$

Analogamente si ha $\overline{y} = 8/15$.