UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA I
del 23.06.2016

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Corso di laurea___________________________ **Matricola**__________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare il grafico della funzione

$$f(x) = \log(x^2 + 2x - 3)$$

determinando dominio, segno, asintoti, intersezioni con gli assi, massimi e minimi, flessi e disegnando alla fine il grafico.

2. Studiare il comportamento della seguente serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{f(n)}$$

dove f é la funzione dell'esercizio 1.

3. Calcolare l'integrale definito

$$\int_2^3 \log(x^2 + 2x - 3)dx.$$

Svolgimento

1. Il dominio della funzione é dato da $x^2 + 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x < -3$ e $x > 1$, mentre il segno é dato da

$$\log(x^2 + 2x - 3) > 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 4 > 0 \Leftrightarrow x < -1 - \sqrt{5},\ x > -1 + \sqrt{5}.$$

Inoltre $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 - \sqrt{5},\ x = -1 + \sqrt{5}$. Per quanto riguarda gli asintoti si ha

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$$

e poiché $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ non ci sono asintoti orizzontali né obliqui, mentre

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty = \lim_{x \to -3^-} f(x)$$

e quindi $x = 1, x = -3$ sono asintoti verticali. Studiamo la derivata prima. Si ha:

$$f'(x) = \frac{2x + 2}{x^2 + 2x - 3}.$$

Quindi $f'(x)$ non si annulla mai nel dominio inoltre riguardo al segno si ha $f'(x) > 0 \leftrightarrow x > 1$. Perció non ci sono punti di massimo o di minimo. Studiamo infine la derivata seconda. Si ha

$$f''(x) = \frac{2(x^2 + 2x - 3) - (2x + 2)^2}{(x^2 + 2x - 3)^2} = \frac{-2x^2 - 4x - 10}{(x^2 + 2x - 3)^2}.$$

Quindi poiché il polinomio al numeratore é sempre negativo, si ha che $f''(x) < 0$ per ogni x appartenente al dominio e quindi la funzione risulta sempre concava.

2. Si ha che

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\log(n^2 + 2n - 3)}$$

é una serie a segni alterni con il termine generale che tende a zero e monotono decrescente (infatti la funzione f é crescente per $n > 1$), quindi per il criterio di Leibnitz é convergente.

Poiché

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\log(n^2+2n-3)} = +\infty,$$

si ha che la serie diverge assolutamente. Infatti, dalla precedente relazione di limite, per n sufficientemente grande, si ottiene

$$\frac{1}{\log(n^2+2n-3)} > \frac{M}{n},$$

con $M > 0$ costante opportuna. Siccome la serie di termine generale M/n é divergente, la serie iniziale é anche essa divergente per il criterio del confronto.

3. Si ha

$$\begin{aligned}
& \int_2^3 \log(x^2+2x-3)dx = \int_2^3 [\log(x+3)+\log(x-1)]dx \\
= & \int_2^3 (x)' \log(x+3)dx + \int_2^3 (x)' \log(x-1)dx \\
= & [x\log(x+3)]_2^3 - \int_2^3 \frac{x}{x+3}dx + [x\log(x-1)]_2^3 - \int_2^3 \frac{x}{x-1}dx \\
= & 3\log 6 - 2\log 5 - \int_2^3 (1-\frac{3}{x+3})dx + 3\log 2 - \int_2^3 (1+\frac{1}{x-1})dx \\
= & 3\log 6 - 2\log 5 - [x - 3\log|x+3|]_2^3 + 3\log 2 - [x+\log|x-1|]_2^3 \\
= & 3\log 6 - 2\log 5 - 3 + 3\log 6 + 2 - 3\log 5 + 3\log 2 - 3 - \log 2 + 2 \\
= & 6\log 6 - 5\log 5 + 2\log 2 - 2.
\end{aligned}$$